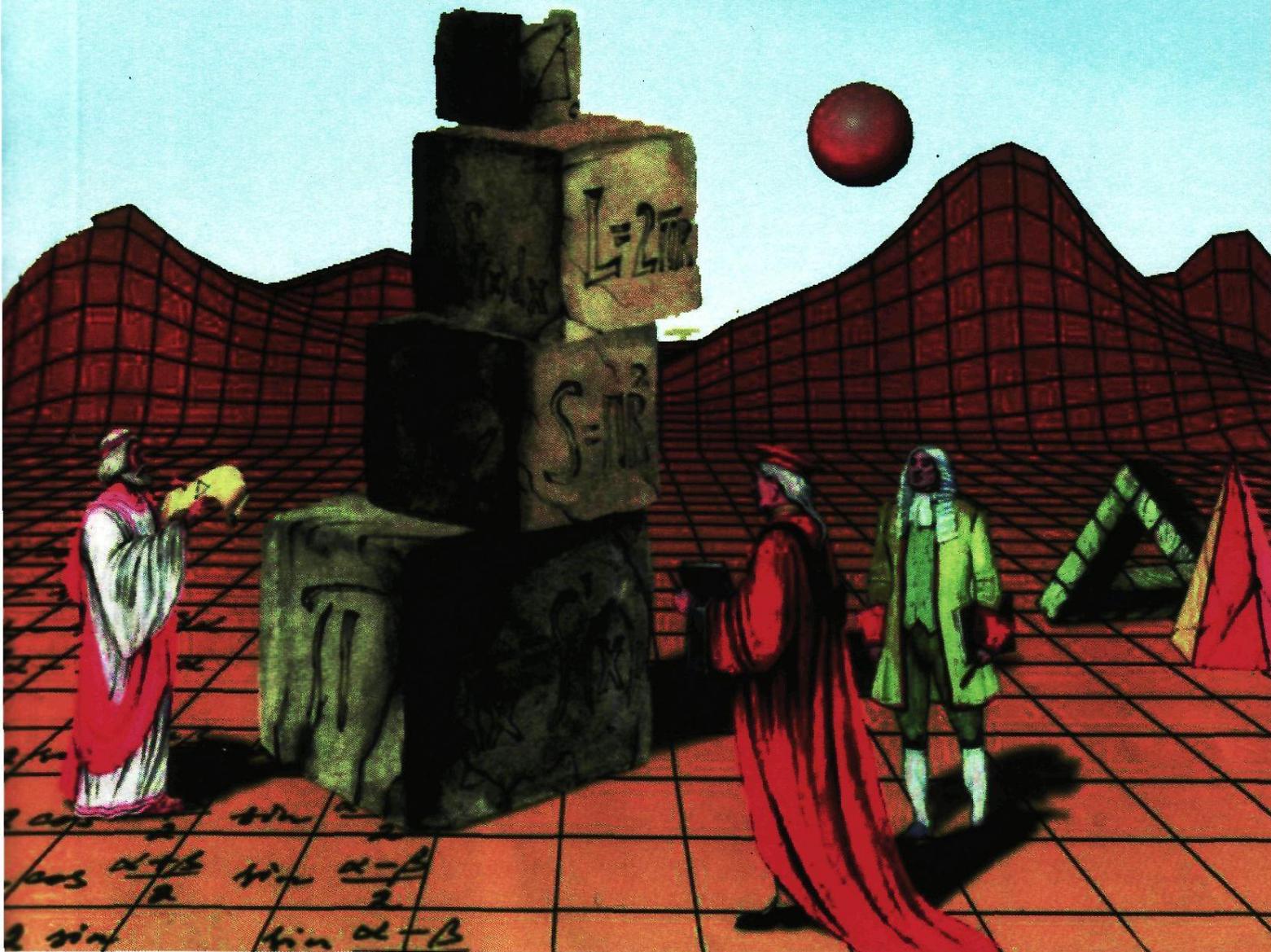




А. Е. Мамонтов

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ



Новосибирск 2016

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. Е. Мамонтов

**МЕТОДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

Утверждено Редакционно-издательским советом
ФГБОУ ВО «НГПУ»
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК 2016

УДК 517.95
ББК В161.62
М226

Рекомендовано
Учебно-методическим советом
ФГБОУ ВО «НГПУ»

*В рамках реализации Программы стратегического
развития ФГБОУ ВПО «НГПУ» на 2012–2016 гг.*

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, проф. Новосибирского
государственного университета

Г. В. Демиденко;

д-р физ.-мат. наук, проф. Новосибирского
государственного педагогического университета

Е. В. Семенко;

д-р физ.-мат. наук, проф. Новосибирского
государственного университета

В. Н. Старовойтов

Мамонтов, А. Е.

М226 Методы математической физики : учебное пособие / А. Е. Мамонтов ; Мин-во образования и науки РФ, Новосиб. гос. пед. ун-т. — Новосибирск : Изд-во НГПУ, 2016. — 130 с.

ISBN 978-5-00023-936-0

В учебном пособии излагаются элементы теории дифференциальных уравнений в частных производных, возникающих в моделях математической физики. Пособие предназначено для изучения курса «Методы математической физики» студентами и магистрантами, обучающимися по направлениям подготовки: прикладная математика и информатика (профили: прикладная информатика, прикладная математика), педагогическое образование (профили: математическое образование, физика, информатика и ИКТ).

УДК 517.91
ББК В161.62

ISBN 978-5-00023-936-0 © Мамонтов А. Е., 2016
© Оформление. ФГБОУ ВО «НГПУ»,
2016

Предисловие

Учебное пособие предназначено для студентов и магистрантов, изучающих курс «Методы математической физики» или его вариант «Уравнения математической физики»¹. Вниманию читателей предлагаются элементы теории дифференциальных уравнений в частных производных, возникающих в моделях математической физики, а также смежные вопросы математического анализа.

Возникновение предлагаемого издания обязано тому, что автору в течение нескольких лет довелось читать лекции по упомянутому курсу и проводить по нему практические занятия. Исходным положением для разработки первоначальной программы курса послужил действовавший на тот момент основной нормативный документ — ГОС ДПП.Ф.03, в котором требования к содержанию курса сформулированы следующим образом (приведено дословно и полностью):

Постановка задач математической физики. Начальные и краевые условия. Корректность задачи. Задача Коши для бесконечной струны. Единственность решения смешанной задачи для закрепленной струны. Задача Коши для одномерного уравнения теплопроводности. Интеграл Фурье в действительной и комплексной форме. Импульсная функция Дирака. Полиномы

¹Пособие прежде всего ориентировано на следующие направления подготовки обучающихся: прикладная математика и информатика (профили: прикладная информатика, прикладная математика) и педагогическое образование (профили: математическое образование, физика, информатика и ИКТ). Материал учебного пособия соответствует требованиям стандартов ФГОС 3 и ФГОС 3+.

Лежандра. Ортогональные системы функций. Ряды по ортогональным системам. Равенство Парсеваля. Уравнение Лапласа. Задача Дирихле. Гармонические функции. Линейные операторы. Коммутаторы. Собственные числа и собственные функции линейных операторов. Тензоры. Тензор инерции.

Перечисленный материал следовало уместить в семестровый курс (2 часа лекций и 1 час практических занятий в неделю) для студентов, даже приблизительно не знакомых с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений, в то время как им предлагалось фактически преподавать элементы теории уравнений в частных производных. Таким образом, задачей автора было максимально учесть все «реперные точки», упомянутые в ГОС, но не превратить курс в набор бесвязных фрагментов, при этом вписаться в формат времени и приспособиться к уровню знаний студентов.

Описанная задача на первый взгляд представляется мало перспективной, но после определенной корректировки ее удалось решить. Насколько успешно — судить читателю. Скажем лишь, что при решении этой нерешаемой задачи основными компромиссными приемами стали два. Первый — пришлось пожертвовать некоторыми пунктами ГОС, которые особенно вопиюще выпадали из общей логики в рамках короткого курса (а именно: полиномы Лежандра, коммутаторы, тензоры, тензор инерции). Второй — свойства уравнений в частных производных приходилось излагать не как элементы одноименной математической теории, а как набор (не всегда строго доказанных, но по большей части обосно-

ванных в той или иной степени²) наблюдений о свойствах конкретных уравнений, прежде всего с позиций физического смысла. Таким образом, получилось нечто среднее между изложением «для математиков» и «для физиков».

Сделаем необходимые пояснения по организации пособия. В квадратных скобках посередине текста вынесены замечания, играющие роль комментариев (расширенных или побочных пояснений). Лексически эти фрагменты прерывают основной текст (т. е. для связного чтения их нужно «не замечать»), но все же они нужны в качестве пояснений. Другими словами, эти фрагменты нужно воспринимать так, как будто они вынесены на поля.

Наиболее употребительные (ключевые) термины используются в виде условных сокращений (аббревиатур), список которых для удобства приведен в конце пособия. Там же приведен список математических обозначений, встречающихся в тексте, но не относящихся к самым употребительным (и/или не понимаемым однозначно в литературе).

Символ \square означает конец доказательства, формулировки утверждения, замечания и т. п. (там, где это нужно во избежание путаницы).

Нумерация формул ведется отдельно в каждом параграфе. При ссылке на часть формулы используются индексы, например $(2)_3$ означает 3-ю часть формулы (2) (частями

²При этом приходилось на каждом примере воспроизводить целые фрагменты общей теории — такие как метод характеристик.

формулы считаются фрагменты, разделенные типографски пробелом, а с логических позиций — связкой «и»). В формулах, представляющих линейные уравнения (алгебраические и дифференциальные), т. е. такие, в которых имеет смысл говорить о «правой части» (свободном члене), нижний индекс $\mathbf{0}$ означает соответствующее однородное уравнение, например: символ $(N)_{\mathbf{0}}$ означает однородное уравнение, соответствующее уравнению (N) , а $(N)_{k\mathbf{0}}$ — однородное уравнение, соответствующее k -му уравнению в (N) .

Данное пособие не может совершенно заменить глубокого изучения предмета, которое требует самостоятельных упражнений и чтения литературы — например, той, список которой приведен в конце пособия. Однако автор попытался изложить основные положения теории в достаточно сжатой форме, пригодной для лекционного курса. В связи с этим следует отметить, что лекционный курс, изложенный в данном пособии, рассчитан на 16–17 лекций.

§ 1. Вывод некоторых дифференциальных уравнений математической физики

Изучим движение струны, сила натяжения которой $T = \text{const}$. Рассмотрим фрагмент струны, не примыкающий к ее концам. Отклонение струны от равновесного положения (прямая линия) обозначим $u = u(t, x)$. Считаем малыми величину u и углы отклонения струны от исходной прямой линии. Обозначим ρ — линейная плотность струны.

Тогда по II закону Ньютона движение куска $[x, x + \Delta x]$ описывается уравнением (знаки с учетом рис. 1)

$$\rho \Delta x u_{tt} = -H + F_{\text{внеш}} \Delta x,$$

где $F_{\text{внеш}}$ — линейная плотность внешних сил,

H — равнодействующая сил натяжения. Имеем (в горизонтальном направлении движения нет):

$$F \cos \beta = G \cos \alpha = T \quad \Longrightarrow \quad F = \frac{T}{\cos \beta}, \quad G = \frac{T}{\cos \alpha}.$$

Далее:

$$H = F \sin \beta + G \sin \alpha = T \operatorname{tg} \beta + T \operatorname{tg} \alpha = T(u_x(x) - u_x(x + \Delta x))$$

(поскольку $\operatorname{tg} \alpha = -u_x(x + \Delta x)$, $\operatorname{tg} \beta = u_x(x)$). В итоге

$$u_{tt} = \frac{T}{\rho} \cdot \frac{u_x(x + \Delta x) - u_x(x)}{\Delta x} + \frac{F_{\text{внеш}}}{\rho} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{T}{\rho} u_{xx} + \frac{F_{\text{внеш}}}{\rho}.$$

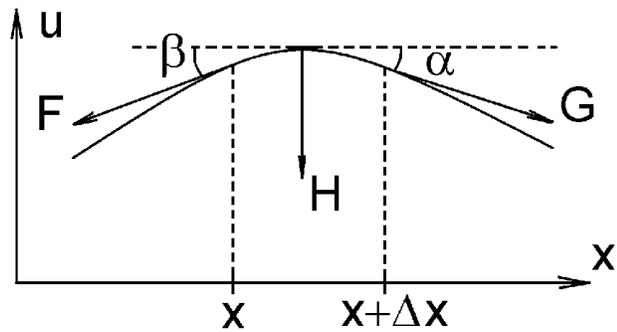


Рис. 1. Фрагмент струны

Обозначим $f = \frac{F_{\text{внеш}}}{\rho}$ (ускорение, сообщаемое внешними силами), $c^2 = \frac{T}{\rho}$. В итоге получим так наз. уравнение колебаний струны (УКС)

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f. \quad (1)$$

Отметим, что $[c^2] = \frac{L^2}{T^2}$, т. е. $[c] = \frac{L}{T}$ — некая характерная скорость. Далее мы выясним ее смысл (см. § 4).

Аналогично (но мы этого делать уже не будем) выводится уравнение колебаний мембраны

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) + f = c^2 \Delta u + f. \quad (2)$$

Колебания трехмерной изотропной упругой среды также описываются уравнением

$$u_{tt} = c^2 \Delta u + f = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f, \quad (3)$$

где u , например — отклонение материальной точки от исходного положения (каждая координата). Оказывается, очень многие колебательные процессы описываются уравнениями вида (1)–(3), называемыми поэтому уравнениями колебаний (еще название — волновое уравнение).

Пример. Уравнения Максвелла для однородной изотропной среды без дисперсии

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\operatorname{rot} \mathbf{E}, & \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \operatorname{rot} \mathbf{B} - \mu \mu_0 \mathbf{j}, \end{aligned}$$

где \mathbf{E} — электрическое поле, \mathbf{B} — магнитное поле, ρ — плотность зарядов, ε — относительная диэлектрическая проницаемость, ε_0 — электрическая постоянная ($\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$), μ_0 — магнитная постоянная, \mathbf{j} — плотность тока, μ — относительная магнитная проницаемость, c — скорость света ($c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$). Имеем, например,

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\mathbf{E}_{tt} + \mu\mu_0\mathbf{j}_t &= \frac{\partial \operatorname{rot}\mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = \\ &= -\nabla\operatorname{div}\mathbf{E} + \Delta\mathbf{E} = \Delta\mathbf{E} - \frac{\nabla\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}, \end{aligned}$$

так что

$$\mathbf{E}_{tt} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\Delta\mathbf{E} - \frac{\mu_0}{\varepsilon}c^2\mathbf{j}_t - \frac{c^2}{\varepsilon^2\varepsilon_0\mu}\nabla\rho.$$

Если, например, среда — диэлектрик ($\mathbf{j} = 0$), а распределение заряда известно, то получаем волновое уравнение

$$\mathbf{E}_{tt} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\Delta\mathbf{E} + \mathbf{f}, \quad (4)$$

где $\mathbf{f} = -\frac{c^2}{\varepsilon^2\varepsilon_0\mu}\nabla\rho$ — известная величина, а $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ играет роль c , если (4) представить в форме (3).

Рассмотрим теперь теплопроводный стержень, участок не рядом с его концами (см. рис. 2). Температура $\theta = \theta(t, x)$. Линейная плотность ρ , массовая теплоемкость c . Тогда во фрагменте $[x, x + \Delta x]$ содержится тепловая энергия $c\theta\rho\Delta x$.

Через края фрагмента идет поток тепла, плотность \mathbf{q} которого (т. е. энергия деленная на площадь и время)

описывается законом

$$\text{Фурье } \mathbf{q} = -\kappa_* \nabla \theta$$

(κ_* — теплопровод-

ность). В данном

(одномерном) случае

получаем

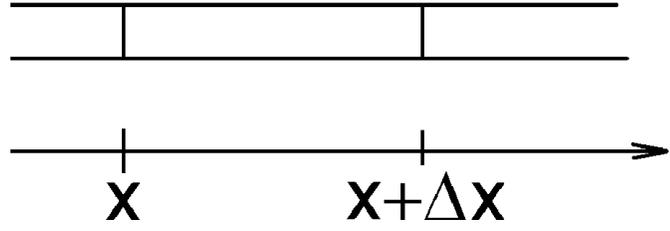


Рис. 2. Фрагмент стержня

$$\frac{d}{dt} c \rho \Delta x = \kappa \theta_x(x + \Delta x) - \kappa \theta_x(x) + \rho_{\text{внеш}} \Delta x,$$

где $\rho_{\text{внеш}}$ — линейная плотность тепловых источников (включая и возможные эффекты теплообмена через боковую поверхность стержня), $\kappa = \kappa_* S$ — линейная теплопроводность (S — площадь сечения стержня). В итоге

$$\theta_t = \frac{\kappa}{c\rho} \cdot \frac{\theta_x(x + \Delta x) - \theta_x(x)}{\Delta x} + \frac{\rho_{\text{внеш}}}{c\rho} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\kappa}{c\rho} \theta_{xx} + \frac{\rho_{\text{внеш}}}{c\rho}.$$

Обозначим $f = \frac{\rho_{\text{внеш}}}{c\rho}$ (нормированная интенсивность подвода тепла), $a^2 = \frac{\kappa}{c\rho} = \frac{\kappa_*}{c\rho_{\text{об}}}$ (т. к. $\rho = \rho_{\text{об}} S$, где $\rho_{\text{об}}$ — объемная плотность). Тогда получим окончательное уравнение

$$\theta_t = a^2 \theta_{xx} + f \quad (5)$$

— одномерное уравнение теплопроводности. Отметим, что

$$[c] = \frac{E}{\theta M}, \quad [\kappa] = \frac{[q] L^3}{\theta} = \frac{E L}{T \theta},$$

откуда $[a^2] = L^2/T$, т. е. $[a] = L/\sqrt{T}$ (смысл величины a изучим позже).

Аналогично (но мы этого делать не будем) выводятся 2- и 3-мерные уравнения теплопроводности:

$$\theta_t = a^2 \Delta \theta + f. \quad (6)$$

Это уравнение описывает поведение не только температуры в теплопроводных средах, но и другие процессы с рассеянием. Поэтому оно также называется уравнением диффузии.

Важный частный случай физических процессов — стационарные, т. е. такие, в которых параметры не меняются со временем. Для процессов, описываемых уравнениями (1)–(3), (6) это приведет к уравнению вида

$$\Delta v = g \quad (7)$$

(где g — известная функция), называемому уравнением Пуассона (при $g = 0$ — уравнением Лапласа). Например, если параметры в электродинамической системе (рассмотренной выше) не меняются со временем, то уравнения Максвелла примут следующий вид (уравнения электростатики)

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{j}.$$

Но тогда $\mathbf{E} = \nabla \varphi$ (φ — (скалярный) потенциал электрического поля), $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ (\mathbf{A} — векторный потенциал магнитного поля, можно считать $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$), и уравнения примут вид

$$\Delta \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}, \quad \Delta \mathbf{A} = -\mu \mu_0 \mathbf{j} \quad (8)$$

— 4 скалярных уравнения Пуассона (если же $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$, то 4 уравнения Лапласа).

Другой пример — мембрана, остановившая свои колебания и принявшая неподвижную форму под действием группы постоянных сил. Из (2) при $u = u(x, y)$ получим уравнение Пуассона

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = -\frac{f}{c^2}$$

(если нет внешних сил, то уравнение Лапласа). Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются гармоническими. Таким образом, остановившаяся мембрана без нагрузки принимает форму графика гармонической функции 2 переменных. Частный случай — остановившаяся ненагруженная струна имеет прямую форму (гармонические функции 1 переменной имеют вид $u'' = 0$, т. е. линейны).

§ 2. Корректность задач математической физики

Для того чтобы описывать физические (и не только) явления количественно (как обычно говорят — «применять математические методы»), неизбежен процесс математического моделирования, при котором реальным объектам сопоставляются идеальные объекты (чаще всего — числа). В результате описание явлений (цель которого, в частности, в прогнозировании, и в частности, в управлении ими) происходит по схеме, изображенной на рис. 3.

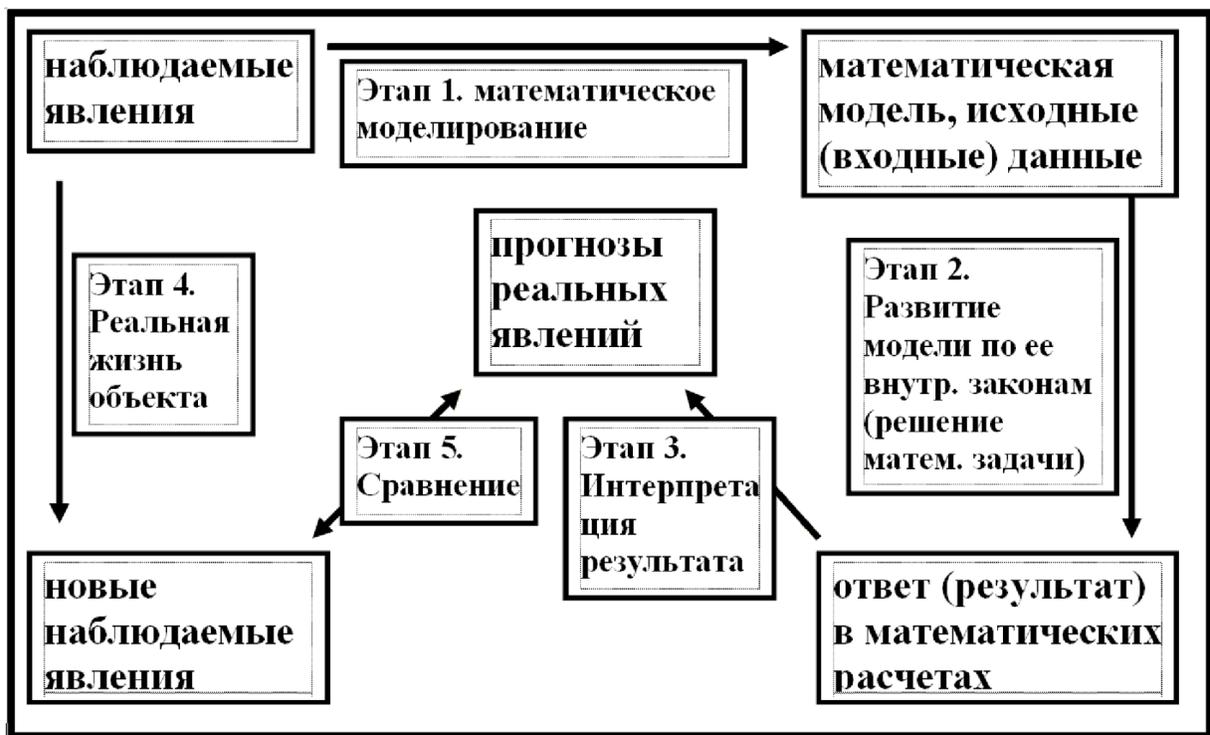


Рис. 3. Процесс математического моделирования

Несмотря на то, что этапы 2 и 4 идут параллельно, и математическая модель «претендует» на то, что этап 2 в определенном смысле соответствует (описывает) этап 4, в реальности между ними нет и не может быть тождества. Этапы 1 и 3 не носят строго логически-объективного характера, но содержат в себе элементы психологии (субъективности), так же как и этап 5, призванный оценивать качество работы на этапе 1. Этап 2 — чисто формальный, подчиняется строгим принципам и потому может быть проведен объективно и независимо разными исследователями. Строго говоря, он «оторван» от реального объекта, и потому его результаты не могут сами по себе ни подтвердить, ни опровергнуть адекватность математической модели (т. е. качество этапа 1).

Однако существуют минимальные требования (необходимые), без выполнения которых математическая модель едва ли может претендовать на какую-либо адекватность. Эти требования называются *корректностью* рассматриваемой задачи математической физики (т. е. сформулированной, после процедуры математического моделирования, уже в математическом виде). Впервые они ясно и полностью были сформулированы французским математиком Ж.Адамаром. Прежде чем привести их, необходимо оговорить, что в любой математической модели имеются данные, которые можно измерять, и которые делятся на исходные и вычисляемые. Это различие во многом условно: при начале исследования все данные неизвестны; с другой стороны, после определенных усилий можно измерить и считать известными очень многие данные, так что они окажутся даже избыточными. Таким образом, разделение данных на известные (измеряемые) и искомые (вычисляемые) — уже важнейшая часть процесса математического моделирования (т. е. этапа 1 в схеме). Для описания этапа 2 будем считать, что это разделение (выделение, формулировка) уже проведено, и мы, таким образом, имеем в нашей математической модели входные (известные) данные f и искомые величины u . Сама же модель выступает в качестве автомата, который по заданному на входе f выдает на выходе u .

В результате математического моделирования составляется уравнение

$$A(u) = f, \tag{1}$$

из которого по заданному f нужно найти u . Здесь A — некоторый оператор (отображение, функция), т. е. заданная последовательность действий, которая производится над неизвестными величинами.

В виде (1) при подходящем определении A , u и f можно записать любую задачу, сформулированную в результате математического моделирования. На математическом языке решить (1) — значит найти обратный оператор A^{-1} , и тогда решение запишется как $u = A^{-1}(f)$. На практике поиск A^{-1} (т. е. решение (1)) может представлять значительные трудности. Но следует различать технические трудности по «поиску явного вида решения»

[которые в настоящее время вообще не считаются актуальными ввиду того, что подавляющее большинство задач и не допускают сколь-нибудь «явного» представления решений]

или хотя бы «описанию его свойств», и принципиальные трудности, связанные с осмыслением самого понятия решения, пониманием его природы, проблемой его существования и т. п.

Именно для решения второй проблемы и необходимо очертить круг требований к «внутренней корректности» задачи (1), при которых хотя бы сама постановка вопроса о поиске решения (1) (пусть пока и в отрыве от исходного объекта, ради описания которого эта задача формулировалась) не будет содержать явных внутренних противоречий или априорной непригодности для описания реальных объектов. Ада-

мар сформулировал эти минимальные требования в следующем виде:

1. Необходимо заранее указать множества \mathcal{U} и \mathcal{F} , которыми ограничен выбор величин u и f соответственно.
2. При любом $f \in \mathcal{F}$ задача (1) должна иметь решение $u \in \mathcal{U}$.
3. При любом $f \in \mathcal{F}$ решение $u \in \mathcal{U}$ должно быть единственным.
4. Решение $u \in \mathcal{U}$ должно непрерывно зависеть от входных данных $f \in \mathcal{F}$, т. е. при малом изменении f решение u должно также меняться мало. Другими словами, сколь угодно малая погрешность при задании f не должна приводить к ощутимым (конечным) изменениям в найденном решении u .

Если эти требования выполнены, то задача (1) называется корректной (по Адамару), и это принято считать признаком качества этапа 2 в схеме выше. Далее уже можно совершенствовать методы решения (1), изучать свойства решений, истолковывать результаты в практическом смысле (этап 3) и т. д. Но в рамках так наз. «математической физики» основное внимание уделяется прежде всего решению задачи (1) самой по себе и в частности вопросу ее корректности.

Пример. Квадратное уравнение $x^2 + ax + b = 0$ на первый взгляд не удовлетворяет требованиям корректности, особенно если искать вещественные решения ($u = x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{U} = \mathbb{R}$;

$f = (a, b) \in \mathbb{R}^2, \mathcal{F} = \mathbb{R}^2$), т. к. решений может вообще не быть. Это можно поправить, положив $\mathcal{U} = \mathbb{C}$, но тогда нарушается требование единственности. Эту проблему можно решить, положив $\mathcal{U} = \mathbb{C}^2$, т. е. понимая решение как пару

$$u = \left(\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \right);$$

п. 4 определения Адамара выполнен ввиду непрерывности соответствующих функций.

Пример. Необходимо засеять поле. Расход семян на единицу площади известен, дано некоторое количество семян, отведена полоса земли. Нужно вспахать правильный кусок полосы (нужной длины). В результате топографических измерений и других факторов установлено, что будущее поле «имеет прямоугольную форму». Последняя фраза представляет собой математическую модель: материальному объекту (поле) сопоставляется идеальный (прямоугольник). При этом тот, кто это делает, берет на себя ответственность в том, что это сопоставление достаточно адекватно (т. е. в самом деле «отклонение формы поля от прямоугольной — в рамках допустимого» и т. п.). Далее задача сводится к простейшей математической формуле для площади прямоугольника

$$S = ab. \tag{2}$$

Мы знаем S . Остается «измерить величину a » (что на практике опять же требует сопоставления реальным объектам на местности идеального объекта — числа a) и подсчитать b по формуле (2). Уравнение (2) имеет вид (1). В нем $u = b$,

$f = (a, S)$, $A(u) = au$. Задача корректна по Адамару: естественно взять $\mathcal{U} = \mathbb{R}^+$, $\mathcal{F} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, тогда пп. 2,3 очевидно выполнены, а п. 4 выполнен ввиду непрерывности функции $g(a, S) = S/a$ на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Благодаря выполнению п. 4 обеспечен тот факт, что «погрешность измерения» величин a и S ,

[связанная не столько с «погрешностью приборов», как
это часто говорят, сколько с самим процессом идеализации поля в виде прямоугольника]

точнее говоря, изменение a и S в рамках определенных диапазонов, приводит к изменению b также в определенном «разумном» (не слишком широком) диапазоне. Дело в том, что при математическом моделировании любой измеряемой «реальной величине» соответствует не одно число, а диапазон чисел. Например, бессмысленно говорить о «длине поля» с точностью до нанометров, и дело тут не в неточности измерений, а в самой природе идеализации поля. Поэтому и результат решения задачи всегда будет не один, а некоторый диапазон. Смысл п. 4 определения Адамара в том, чтобы этот «окончательный диапазон» был не слишком широким (точнее, чтобы обеспечить для этого необходимое условие).

Пример. Стрельба из артиллерийского орудия. Орудие стоит в точке $(x_0, 0)$, стреляет вправо под углом α к горизонту, начальная скорость снаряда равна u_0 . Нужно поразить цель в точке $(x_*, 0)$ (конечно, $x_* > x_0$). Сопротивлением воздуха пренебрегаем (это уже серьезный шаг в математическом моделировании). Для координат (x, y) снаряда имеем

задачу Коши

$$x'' = 0, \quad y'' = -g; \tag{3}$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = 0, \quad x'(0) = v, \quad y'(0) = w,$$

где $v = u_0 \cos \alpha$, $w = u_0 \sin \alpha$. Решаем:

$$x = x_0 + vt, \quad y = wt - gt^2/2,$$

откуда видно что снаряд упадет на землю при $t = t_* = 2w/g$, так что

$$x_* = x(t_*) = x_0 + \frac{2vw}{g} = x_0 + \frac{u_0^2}{g} \sin 2\alpha. \tag{4}$$

Здесь измеряемыми величинами являются x_0 , x_* , α , u_0 , t_* , g и т. д. При необходимости можно измерить и $x(t)$, $y(t)$, $x'(t)$, $y'(t)$ и т. п. при различных t , но это излишне. По смыслу задачи ясно, что мы можем управлять углом α , значит, его и нужно считать искомым: $u = \alpha$. А заданными величинами являются x_0 , x_* , u_0 , g и т. д. Здесь видно, что набор величин, включаемых в вектор f , зависит от субъективного выбора исследователя, т. к. нет априорной границы между «входными данными» (изменяемыми) и «константами». В данном случае можно, например, считать $f = x_*$, а величины x_0 , u_0 , g и т. д. считать фиксированными (константами задачи). Тогда задача (3) принимает вид (1), где роль A играет оператор решения задачи Коши (3), который, к счастью, выписывается в явном виде (4), т. е. $A(u) = A(\alpha) = x_0 + \frac{u_0^2}{g} \sin 2\alpha$, так что нетрудно найти A^{-1} и тем самым явно выразить решение:

Случай 1. $x_* > x_0 + \frac{u_0^2}{g}$. Тогда решений нет.

Случай 2. $x_* = x_0 + \frac{u_0^2}{g}$. Тогда решение одно: $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Случай 1. $x_* < x_0 + \frac{u_0^2}{g}$. Тогда решений два:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{x_* - x_0}{u_0^2} g \right); \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1. \quad (5)$$

Таким образом, необходимо положить $\mathcal{F} = \left(x_0, x_0 + \frac{u_0^2}{g} \right]$, а с выбором \mathcal{U} возникают дополнительные трудности, т. к. решений, вообще говоря, два, что соответствует реальной стрельбе (навесная и настильная траектории). Здесь можно поступить по-разному.

Вариант 1. Ограничиться только настильной стрельбой (или только навесной), положив $\mathcal{U} = \left(0, \frac{\pi}{4} \right]$ или соответственно $\mathcal{U} = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right)$.

Вариант 2. Положить $\mathcal{U} = \left(0, \frac{\pi}{4} \right] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right)$, считая тем самым каждый раз решением пару возможных углов.

В обоих вариантах решение $u \in \mathcal{U}$ будет существовать и будет единственно при всех $f \in \mathcal{F}$, т. е. пп. 2,3 определения Адамара выполнены; п. 4 также выполнен ввиду непрерывности функций (5). На практике это означает, что при достаточной точности задания угла стрельбы диапазон попадания снарядов будет достаточно мал, чтобы цель попадала в пятно поражения взрывом снаряда. \square

Во всех трех примерах мы смогли добиться корректности без особых усилий. В более сложных задачах это не всегда

легко сделать. Особенности сложности может представлять обеспечение п. 4 определения Адамара. С такими примерами мы познакомимся позднее.

§ 3. Краевые задачи для дифференциальных уравнений

Если математическая модель формулируется в виде дифференциальных уравнений, то для выполнения требования корректности недостаточно рассматривать только эти уравнения, но необходимо добавлять дополнительные условия (которые будут играть роль дополнительных соотношений и входных данных), т. к. иначе заведомо нарушается требование единственности решения. Это можно видеть уже на примере ОДУ, как показывает следующий пример.

Пример. Бросаем камень вертикально вверх с высоты 0, сопротивление воздуха не учитываем. Найти время полета до падения на землю. Если h — высота камня, то

$$h'' = -g, \quad (1)$$

так что $h(t) = -gt^2/2 + at + b$, где a и b — постоянные. Это общий факт: решения ОДУ II порядка образуют 2-параметрическое семейство. Чтобы выделить единственное решение, необходимо задать 2 дополнительных условия. Одно условие сразу ясно из условий задачи:

$$h(0) = 0, \quad (2)$$

так что $b = 0$. Чтобы найти a , нужно привлечь дополнительные соображения. В данном случае естественно считать

заданной начальную скорость:

$$h'(0) = v. \quad (3)$$

Тогда $a = v$, так что

$$h(t) = -\frac{gt^2}{2} + vt. \quad (4)$$

Имеем: $h(t) = 0$ при $t = t_* = 2v/g$ — это и есть ответ. С математической точки зрения мы добились корректности задачи, добавив уравнению (1) так наз. начальные данные (2), (3) (данные Коши, начальные условия), получив в результате задачу Коши (1)–(3), которая уже имеет единственное решение (4). \square

Возможны и другие варианты дополнительных условий, как показывает следующий пример.

Пример. В условиях предыдущего Примера будем считать заданной скорость не в момент броска $t = 0$, а в момент $t_0 > 0$:

$$h'(t_0) = w. \quad (5)$$

Получим так наз. краевую задачу (1), (2), (5), решая которую, легко найдем $h(t) = -gt^2/2 + (w + gt_0)t$, и в частности можно вычислить начальную скорость $h'(0) = w + gt_0$, которую необходимо придать камню. \square

При решении краевых задач для ОДУ могут возникнуть дополнительные трудности: решение может не существовать или быть не единственным при определенных значениях параметров задачи — впрочем, эти значения, на первый взгляд «неудачные», на самом деле представляют интерес, в том

числе для решения некоторых УЧП (этот вопрос мы рассмотрим позже).

В случае УЧП ситуация осложняется тем, что решение УЧП содержит уже не числовые, а функциональные параметры.

Пример. Пусть u — некоторая величина, зависящая от времени t и координаты x . Скорость изменения этой величины в каждой точке x в момент t известна и равна $f(t, x)$. Найти $u(t, x)$. Имеем простейшее УЧП, описывающее данный процесс:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f. \quad (6)$$

Решая его, получаем: $u(t, x) = u(0, x) + \int_0^t f(s, x) ds$. Поскольку $u(0, x)$ неизвестно, то это может быть произвольная величина $\varphi(x)$. Тем самым, все решения (6) имеют вид

$$u(t, x) = \varphi(x) + \int_0^t f(s, x) ds, \quad (7)$$

где φ — произвольная функция. Чтобы выделить единственное решение, нужно добавить к (6) дополнительные условия, причем ясно, что задание каких-либо числовых параметров здесь будет недостаточным, а нужно задавать функциональные соотношения. Самое естественное — задать начальное состояние системы:

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (8)$$

Тогда очевидно $\varphi = u_0$, и решение так наз. задачи Коши (6), (8) принимает вид

$$u(t, x) = u_0(x) + \int_0^t f(s, x) ds. \quad (9)$$

В данном примере расчеты были крайне просты; в случае более сложных УЧП это уже не так, но определенная аналогия остается. Покажем, как можно задавать дополнительные условия для тех УЧП, которые мы вывели в § 1.

УКС

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f \quad (10)$$

выражает тот факт, что ускорение точки струны определяется силой, действующей на нее (что соответствует правой части (10)). По аналогии с механикой точки, рассмотренной нами неоднократно выше, решений такая задача будет иметь много, но выделить единственное решение можно, задав, например, начальное положение и скорость точки. В случае (10) это означает, что следует задать начальное положение всех точек струны, т. е. ее форму в момент $t = 0$:

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (11)$$

и начальную скорость всех точек (профиль скорости при $t = 0$):

$$u_t|_{t=0} = \psi(x). \quad (12)$$

Получается так наз. задача Коши (10), (11), (12) для УКС (10). Как мы выясним позже (в § 4), эта задача корректна в случае бесконечной струны, т. е. если $u(t, x)$ определена

(ищется) при $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. К тому факту, что условия (11), (12) являются подходящими для (10), можно было придти и из чисто математических соображений (II порядок уравнения (10), свойства начальной кривой $\{t = 0\}$, и т. д.), но в цели нашего курса это не входит.

Бесконечность струны — это идеализация, допустимая в случае, если мы рассматриваем точки, достаточно далекие от концов струны (а именно, те, до которых не успевают прийти какая-либо информация, сигнал от концов). В противном случае необходимо рассматривать ограниченную или полубесконечную струну.

Пример. Левый конец струны учитывается (считаем что он находится в точке $x = 0$), а правый — нет, т. е. струна занимает интервал $[0, +\infty)$ на оси x . В этом случае задача (10)–(12) преобразуется к виду

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f, \quad t > 0, \quad x > 0; \quad (13)$$

$$u|_{t=0, x>0} = \varphi, \quad (14)$$

$$u_t|_{t=0, x>0} = \psi. \quad (15)$$

Как мы увидим позже, эта задача заведомо некорректна, т. к. имеет много решений, так что нужно добавить дополнительные условия. Как из физических, так и из математических соображений можно придти к условию вида

$$u|_{x=0, t>0} = \chi(t), \quad (16)$$

выражающему тот факт, что закон колебаний левого конца струны задан (например, при $\chi = 0$ конец закреплен). С позиций общей теории УЧП все дополнительные условия

(14)–(16) называются краевыми или граничными условиями (т. к. они выражают поведение искомой функции на краю, границе ее области определения), а задача (13)–(16) — краевой задачей (как, впрочем, и условия и задачи $\{(10)–(12)\}$, $\{(6),(8)\}$, $\{(1)–(3)\}$), но исторически сложилось так, что если t играет роль времени, то краевые условия при $t = t_{\text{нач}}$ называют начальными, а если других условий нет, то вся задача называется начальной (обычно это задача Коши, т. е. задача, в которой число условий равно порядку уравнения). В данном случае начальными можно назвать условия (14) и (15), а условие (16) называется краевым уже в узком смысле (оно и в самом деле описывает поведение физической величины u на краю ее пространственной области определения $[0, +\infty)$). Вся задача (13)–(16) при этом называется начально-краевой задачей (или смешанной задачей, т. к. в ней «смешаны условия двух видов»). Позже мы покажем корректность задачи (13)–(16).

Возможны и другие варианты краевых условий вместо (16), например, такое:

$$u_x|_{x=0,t>0} = \rho(t), \quad (17)$$

означающее задание наклона струны в левом конце (при $\rho = 0$ это значит, что конец свободно движется). Задача (13)–(15),(17) также корректна. Условия (16) и (17) называются соответственно I и II краевыми условиями, а соответствующие начально-краевые задачи — I и II начально-краевыми задачами (НКЗ). Иногда рассматривается краевое

условие III рода: $(\alpha u_x + \beta u)|_{x=0} = \varkappa(t)$, но в нашем курсе мы не будем его изучать. \square

Пример. Если оба конца струны необходимо учитывать, то уравнение (10) и условия (11),(12) рассматриваются уже на конечном интервале $x \in (a, b)$, и в этом случае необходимо задавать условие на обоих концах струны, т. е. при $x = a$ и $x = b$, например:

$$u|_{x=a} = \chi_1(t), \quad u|_{x=b} = \chi_2(t) \quad (18)$$

(I краевое условие, получается I НКЗ), или

$$u_x|_{x=a} = \rho_1(t), \quad u_x|_{x=b} = \rho_2(t) \quad (19)$$

(II краевое условие, получается II НКЗ), или смешанные варианты; физический смысл этих условий тот же что и в случае полубесконечной струны. Корректность описанных задач будет обсуждаться позднее. \square

Аналогично ставятся краевые задачи для волнового уравнения в многомерном случае. Так, например, если мембрана бесконечна (покрывает всю плоскость), то к уравнению

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) + f \quad (20)$$

достаточно добавить начальные данные

$$u|_{t=0} = \varphi, \quad u_t|_{t=0} = \psi, \quad (21)$$

чтобы получить корректную задачу (Коши). Если же мембрана имеет границы, т. е. занимает некоторую область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (ограниченную или нет), то соотношения (20), (21) рассматриваются при $(x, y) \in \Omega$, но тогда на границе мем-

браны следует задать 1 дополнительное условие. Аналогично одномерному случаю, наиболее распространены следующие варианты:

$$u|_{\partial\Omega} = \chi \quad (22)$$

(I краевое условие, соответственно (20)–(22) называется I НКЗ, физический смысл (22) очевиден — задается закон колебания края мембраны, например, при $\chi = 0$ это означает что край закреплен), или

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega} = \rho \quad (23)$$

(соответственно, II краевое условие), ит. д.

Для уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 \Delta u + f \quad (24)$$

ситуация полностью аналогична, за исключением числа начальных условий. Дело в том, что это уравнение — I порядка по t , поэтому при $t = 0$ следует задавать только значение самой функции u :

при необходимости значение $u_t|_{t=0}$ тогда уже можно найти прямо из (24), откуда уже ясно, что задача с заданием u и u_t при $t = 0$ переопределена и потому вообще говоря не имеет решений

$$u|_{t=0} = \varphi. \quad (25)$$

Если рассматривается теплопроводная среда, занимающая все пространство \mathbb{R}^n , то условия (24), (25) (при $x \in \mathbb{R}^n$) образуют корректную (как мы покажем позже) задачу, на-

зывается начальной задачей (задачей Коши-Дирихле³) для уравнения теплопроводности (24). Физический смысл этой задачи очевиден — найти распределение температуры в бесконечной теплопроводной среде, если известны начальная температура и источники (потребители) тепла.

Соответственно, если среда занимает лишь некоторую область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, то (24), (25) рассматриваются при $x \in \Omega$, а на $\partial\Omega$ требуется задать дополнительные условия буквально так же как это делалось для уравнения колебаний. Физический смысл этих условий достаточно прост: (22) означает известную температуру на границе тела, а (23) означает заданный тепловой поток на границе. Соответствующие задачи: I НКЗ (24),(25),(22) и II НКЗ (24),(25),(23) также корректны по Адамару, хотя доказательство этого факта нетривиально. Позднее мы будем рассматривать одномерный случай (аналогично (16)–(19)), в котором этот факт легче обосновать.

Наконец, для уравнения Пуассона

$$\Delta u = g \tag{26}$$

постановка краевых задач в значительной степени аналогична, но имеются и существенные отличия. Их можно понять как из математических, так и из физических соображений. В рамках нашего курса естественнее прибегать ко второму способу. Уравнение (26) можно понимать как стационарный вариант уравнений (20) и (24), т. е. оно описывает «застывшее» состояние упругой среды или стационарное распреде-

³В литературе также распространено не вполне точное название «задача Коши» для этой задачи.

ление температуры.

на практике это означает достаточно медленное изменение, после достаточно большого времени стабилизации, т. е. решение (20) или (24) при $t \gg 1$, если внешние факторы способствуют затуханию колебаний

Поэтому естественно, что условия (22), (23) остаются прежними. В случае уравнения (26) условие I рода (22) называется условием Дирихле (а соответствующая задача (26), (22) — задачей Дирихле, или I краевой задачей), а (23) — условием Неймана (а (26), (23) — задачей Неймана, II краевой задачей). Правда, в отличие от нестационарных уравнений, указанных условий вообще говоря недостаточно: могут требоваться дополнительные условия на ∞ (если область Ω , в которой ищется решение, неограничена), дополнительные условия на ρ в некоторых случаях, и т. д. Эти вопросы удобнее рассматривать с математических позиций. В определенной степени мы это сделаем позже, обсудив попутно корректность соответствующих задач в простейших случаях.

Пример. Ищется стационарное электрическое поле в теле, имеющем форму области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Как говорилось в § 1, эта задача сводится к решению УЧП

$$\Delta\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad (27)$$

для потенциала φ электрического поля (после чего само поле находится по формуле $\mathbf{E} = \nabla\varphi$), где ρ — плотность зарядов в теле. Если считать ε и ρ известными, то (27) есть уравнение Пуассона. Согласно вышеизложенному, для получения

корректной задачи (т. е. однозначного нахождения искомого поля) мы можем добавить к (27), например, условие Дирихле

$$\varphi|_{\partial\Omega} = \mu \quad (28)$$

(означающее что потенциал на границе тела известен; например, при $\mu = 0$ это означает что граница заземлена) или Неймана

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \right|_{\partial\Omega} = \kappa \quad (29)$$

(означающее что на границе известна нормальная составляющая электрического поля).

§ 4. Задача Коши для УКС

Итак, рассмотрим задачу

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi, \quad (2)$$

$$u_t|_{t=0} = \psi. \quad (3)$$

Оказывается, эта задача допускает нахождение решения в явном (и достаточно простом) виде (что является крайне редким явлением в общей теории УЧП) и подробное исследование его свойств. Удобно начать с исследования частного случая — однородного уравнения

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (4)$$

причем временно «забыв» о начальных данных (2), (3). Оказывается, можно в явном виде найти все решения (т. е. общее решение) уравнения (4). Чтобы это сделать, попытаемся

упростить уравнение (4), перейдя в другую СК, хотя уже не имеющую такого простого физического смысла как $\{t, x\}$, но зато позволяющую придать (4) более простой вид с позиций вычислений. Итак, пусть имеются другие независимые переменные ξ, η , в которых мы будем выражать величину u , при этом, естественно, она будет выражаться другой функцией (скажем, v):

$$u(t, x) = v(\xi, \eta), \quad (5)$$

при этом связи

$$\xi = \alpha(t, x), \quad \eta = \beta(t, x) \quad (6)$$

между старыми переменными (t, x) и новыми (ξ, η) подлежат нахождению. Пересчитаем производные величины u в новых переменных, используя тождество

$$u(t, x) = v(\alpha(t, x), \beta(t, x)), \quad (7)$$

выражающее (5), (6) (т. е. переход в новую СК) в одной формуле. Дифференцируя (7), получаем:

$$\begin{aligned} u_t &= v_\xi \alpha_t + v_\eta \beta_t, & u_x &= v_\xi \alpha_x + v_\eta \beta_x; \\ u_{tt} &= v_\xi \alpha_{tt} + v_\eta \beta_{tt} + v_{\xi\xi} \alpha_t^2 + 2v_{\xi\eta} \alpha_t \beta_t + v_{\eta\eta} \beta_t^2, \\ u_{xx} &= v_\xi \alpha_{xx} + v_\eta \beta_{xx} + v_{\xi\xi} \alpha_x^2 + 2v_{\xi\eta} \alpha_x \beta_x + v_{\eta\eta} \beta_x^2, \end{aligned}$$

так что уравнение (4) примет вид

$$\begin{aligned} v_{\xi\xi}(\alpha_t^2 - c^2 \alpha_x^2) + v_{\eta\eta}(\beta_t^2 - c^2 \beta_x^2) + 2v_{\xi\eta}(\alpha_t \beta_t - c^2 \alpha_x \beta_x) + \\ + v_\xi(\alpha_{tt} - c^2 \alpha_{xx}) + v_\eta(\beta_{tt} - c^2 \beta_{xx}) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

У нас в руках 2 произвольные функции α и β , от которых нужно лишь требовать функциональной независимости (чтобы они порождали новую СК), т. е. соотношение вида

$$0 \neq \begin{vmatrix} \alpha_t & \alpha_x \\ \beta_t & \beta_x \end{vmatrix} = \alpha_t \beta_x - \alpha_x \beta_t. \quad (9)$$

Значит, можно попытаться добиться выполнения 2 удобных нам условий в уравнении (8). Самое естественное — занулить коэффициенты при $v_{\xi\xi}$ и $v_{\eta\eta}$. Это означает выполнение уравнений $\alpha_t^2 = c^2 \alpha_x^2$, $\beta_t^2 = c^2 \beta_x^2$, т. е.

$$\alpha_t = \pm c \alpha_x, \quad \beta_t = \pm c \beta_x. \quad (10)$$

Это одно и то же уравнение (точнее, пара уравнений) для 2 функций, поэтому достаточно найти, например, α . Для определенности начнем с уравнения с «−»:

$$\alpha_t + c \alpha_x = 0. \quad (11)$$

Рассмотрим прямые $x = ct + \gamma$, где $\gamma = \text{const}$ произвольна. Любая функция $\alpha(t, x)$ вдоль этой прямой: $\alpha(t, ct + \gamma)$ имеет свойство $\frac{d}{dt} \alpha(t, ct + \gamma) = (\alpha_t + c \alpha_x)(t, ct + \gamma)$. Значит, решениями (11) будут те и только те функции α , которые постоянны вдоль этих прямых: $\alpha(t, ct + \gamma) = A(\gamma)$. Другими словами, $\alpha(t, x) = \alpha(t, ct + \gamma)|_{\gamma=x-ct} = A(x - ct)$. Таким образом, $\alpha = A(x - ct)$ и есть общее решение уравнения (11). Аналогично $\alpha = A(x + ct)$ есть общее решение уравнения $\alpha_t - c \alpha_x = 0$. Чтобы теперь выписать нужные нам решения уравнений (10), заметим, что для выполнения (9) нужно взять разные знаки в (10). В самом деле, если например, взять «−» в обоих уравнениях, получим $\alpha = A(x + ct)$,

$\beta = B(x + ct)$, и тогда

$$\begin{vmatrix} \alpha_t & \alpha_x \\ \beta_t & \beta_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A'(x + ct)c & A'(x + ct) \\ B'(x + ct)c & B'(x + ct) \end{vmatrix} = 0.$$

Для определенности возьмем

$$\alpha = A(x + ct), \quad \beta = B(x - ct).$$

Таким образом, искомая СК имеет вид

$$\xi = A(x + ct), \quad \eta = B(x - ct),$$

где A, B — произвольные функции. Проще всего положить $A(s) = B(s) = s$, т. е.

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct. \quad (12)$$

В этом случае уравнение (8) примет вид

$$v_{\xi\eta} = 0, \quad (13)$$

который называется каноническим видом уравнения (4). Канонический вид удобен тем, что в нем уравнение легче решать. В данном случае решение тривиально:

$$v_{\xi\eta} = 0 \iff v_{\xi} = m(\xi) \iff v = M(\xi) + N(\eta).$$

Возвращаясь в исходную СК, получаем формулу общего решения однородного УКС (4):

$$u(t, x) = F(x + ct) + G(x - ct), \quad (14)$$

где F, G — произвольные (гладкие) функции. Теперь решение задачи Коши (4), (2), (3) не представляет сложностей — остается подставить (14) в (2), (3) и найти F, G :

$$F(x) + G(x) = \varphi(x) \iff F + G = \varphi, \quad (15)$$

$$cF'(x) - cG'(x) = \psi(x) \iff F' - G' = \psi/c. \quad (16)$$

Операция $((15)' + (16))/2$ дает $F' = \frac{\varphi' + \psi/c}{2}$, откуда

$$F(s) = \frac{\varphi(s)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^s \psi(\xi) d\xi + \tilde{\gamma},$$

где $\tilde{\gamma} = \text{const}$, а теперь из (15) находим

$$G(s) = \frac{\varphi(s)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^s \psi(\xi) d\xi - \tilde{\gamma}.$$

В итоге из (14) получаем формулу решения задачи (4), (2), (3):

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi) d\xi, \quad (17)$$

называемую формулой Даламбера. Поскольку все рассуждения при выводе этой формулы были необходимыми и достаточными, то наличие и однозначность (17) автоматически доказывают существование и единственность решения задачи Коши (4), (2), (3). Доказательство остальных положений для корректности этой задачи (по Адамару) не представляет особых сложностей. Так, можно, например, положить

$$u = u, \quad f = (\varphi, \psi), \quad \mathcal{U} = C^2(\mathbb{R}^2), \quad \mathcal{F} = C^2(\mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R}),$$

и тогда из (17) очевидно что $\forall (\varphi, \psi) \in \mathcal{F} \exists! u \in \mathcal{U}$; непрерывная зависимость u от f также имеет место, если под сходимостью в \mathcal{U} и \mathcal{F} понимать сходимость в соответствующих нормах на компактах.

Свойства решений (17) задачи (4), (2), (3) достаточно богато соответствуют свойствам реальных струн, показывая тем самым достаточную адекватность модели. Проиллюстрируем этот тезис в частном случае, когда $\psi = 0$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} p(x), & x \in (-1, 1), \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где p — произвольная гладкая функция. Тогда непосредственное вычисление (17) дает решение, которое изображено на рис. 4. Смысл полученного решения легко понять: начальный профиль струны имеет вид

$$p(x) = \frac{p(x)}{2} + \frac{p(x)}{2} \text{ на}$$

отрезке $[-1, 1]$, а затем при увеличении t каждый из профилей-слагаемых движется со скоростью c вправо и влево соответственно. Таким образом, c есть скорость распространения волн на струне (напомним, что $c^2 = T/\rho$, где T — сила натяжения, а ρ — линейная плотность), тем самым мы выяснили смысл скорости c , полученной в § 1.

Пример. $p(x) = 1 - x^2$. Строго говоря, такой профиль недопустим, т. к. тогда $\varphi \in C(\mathbb{R})$, но $\varphi \notin C^1(\mathbb{R})$, и тем более $\varphi \notin C^2(\mathbb{R})$, так что «решение», полученное по формуле (17), не будет удовлетворять УКС в классическом смысле. Однако

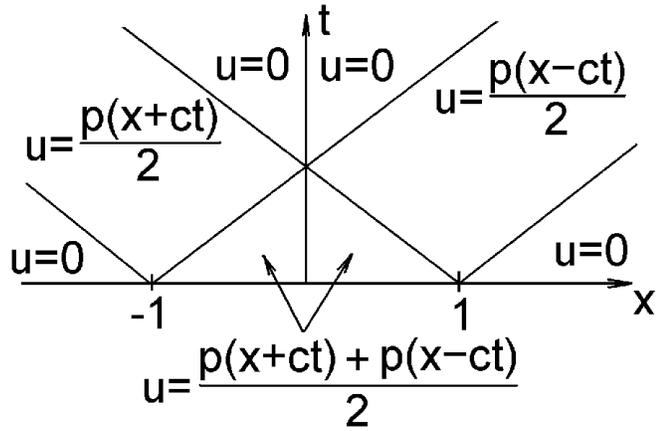


Рис. 4. Значения функции u

указанное затруднение носит технический характер и может быть преодолено (не будем здесь останавливаться на этом вопросе); преимущество выбранной функции p — в простоте формул. При $t \in (0, 1/c)$ решение имеет вид

$$u(t, x) = \begin{cases} 1 - c^2 t^2 - x^2, & x \in (-1 + ct, 1 - ct) \\ \frac{1}{2}(1 - (x + ct)^2), & x \in (-1 - ct, -1 + ct) \\ \frac{1}{2}(1 - (x - ct)^2), & x \in (1 - ct, 1 + ct) \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При $t \in [1/c, +\infty)$ решение имеет вид

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - (x + ct)^2), & x \in (-1 - ct, 1 - ct) \\ \frac{1}{2}(1 - (x - ct)^2), & x \in (-1 + ct, 1 + ct) \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Графически построенное решение представлено на рис. 5.

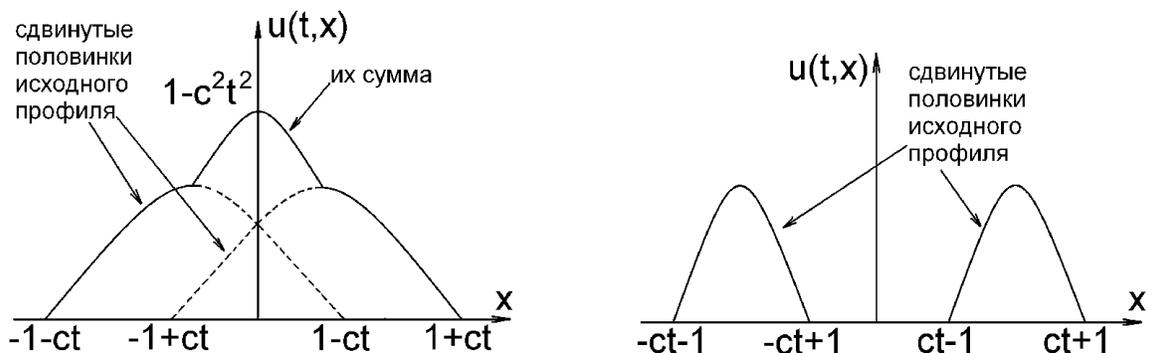


Рис. 5. Распространение волны на струне

В общем случае (при любых φ, ψ) решение ведет себя аналогично (как видно из (14)): оно есть сумма 2 волн, движущихся со скоростью c в 2 противоположных направлениях. Форма этих волн определяется начальными профилями самой струны и ее скорости.

Рассмотрим теперь общий случай (1)–(3). Ясно, что решение этой задачи не более чем одно (т. к. разность двух решений удовлетворяет однородной задаче, которая может иметь только нулевое решение по формуле (17)). Остается предъявить это единственное решение и тем самым показать его существование. Для этого рассмотрим 2 задачи: (1)₀, (2), (3), решение v которой дается формулой (17), и задачу (1), (2)₀, (3)₀, решение w которой мы сейчас найдем. Тогда, очевидно, их сумма $u = v + w$ есть искомое решение задачи (1)–(3). Итак, остается найти w . Для этого рассмотрим вспомогательную задачу с параметром $\tau > 0$:

$$\rho_{tt} = c^2 \rho_{xx}; \quad \rho|_{t=\tau} = 0, \quad \rho_t|_{t=\tau} = f(\tau, x). \quad (18)$$

С точностью до сдвига начального момента это уже изученная задача (4), (2), (3), поэтому ее решение $\rho(t, x; \tau)$ существует, единственно, и даже может быть выписано в явном виде по обобщенной формуле (17). Но сейчас мы намеренно не будем выписывать этот явный вид, а сразу заметим, что функция

$$w(t, x) = \int_0^t \rho(t, x; \tau) d\tau \quad (19)$$

есть искомая, т. к.

$$w_t = \rho(t, x; t) + \int_0^t \rho_t(t, x; \tau) d\tau = \int_0^t \rho_t(t, x; \tau) d\tau;$$

$$w_{tt} = \rho_{tt}(t, x; t) + \int_0^t \rho_{tt}(t, x; \tau) d\tau = f(t, x) + \int_0^t \rho_{tt}(t, x; \tau) d\tau;$$

$$w_{xx} = \int_0^t \rho_{xx}(t, x; \tau) d\tau,$$

откуда очевидны все соотношения (1), (2)₀, (3)₀ для w . Описанный метод построения решения (1), (2)₀, (3)₀ с помощью вспомогательной задачи (18) называется принципом Дюамеля, а (19) — интегралом Дюамеля; этот метод работает в гораздо более широком классе задач, независимо от того, имеется ли явная формула для решений. В данном же случае такая формула есть, и ее легко получить, сделав в (18) замену $t - \tau = s$, т. е. рассмотрев новую функцию $z(s, x) = z(t - \tau, x) = \rho(t, x; \tau) = \rho(s + \tau, x; \tau)$. Имеем:

$$(z_{ss} - c^2 z_{xx})(s, x) = (\rho_{tt} - c^2 \rho_{xx})(s + \tau, x; \tau) = 0,$$

$$z(0, x) = \rho(\tau, x; \tau) = 0, \quad z_s(0, x) = \rho_t(\tau, x; \tau) = f(\tau, x),$$

откуда по формуле (17) получаем:

$$z(s, x) = \frac{1}{2c} \int_{x-cs}^{x+cs} f(\tau, \xi) d\xi \quad \Longrightarrow$$

$$\rho(t, x; \tau) = z(t - \tau, x) = \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi,$$

и по формуле (19) окончательно выводим

$$w(t, x) = \frac{1}{2c} \int_0^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} d\xi f(\tau, \xi).$$

В итоге решение задачи (1)–(3) дается формулой

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi) d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2c} \int_0^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} d\xi f(\tau, \xi). \quad (20)$$

На практике зачастую удобнее не применять формулу (20) непосредственно, а находить решение u пошагово, как это описано выше.

§ 5. Смешанные задачи для УКС. Метод Фурье

Снова рассмотрим УКС

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f, \quad (1)$$

но на этот раз для конечной струны, т. е. при $x \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ (случай полубесконечной струны обсудим позже). Как говорилось в § 3, по-прежнему к (1) добавляются начальные

данные:

$$u|_{t=0} = \varphi, \quad u_t|_{t=0} = \psi \quad (2)$$

(но теперь ужé, конечно, на (a, b)), и еще требуются условия при $x = a, b$, например, такие:

$$u|_{x=a} = \chi_1 \quad \text{или} \quad u_x|_{x=a} = \rho_1, \quad (3)$$

$$u|_{x=b} = \chi_2 \quad \text{или} \quad u_x|_{x=b} = \rho_2. \quad (4)$$

Эту задачу можно решать разными способами.

Способ I. Искать решение в виде $u = v + w$, где v — решение $(1)_0, (2)–(4)$, а w — решение $(1), (2)_0, (3)_0, (4)_0$. При этом поиск w сводится к первой задаче ввиду принципа Дюамеля, который здесь также работает. А задачу для v можно решать, например, подстановкой формулы общего решения $(1)_0$ в начально-краевые условия $(2)–(4)$. Но для расширения кругозора и исследования дополнительных свойств УКС мы будем использовать

Способ II. Метод Фурье (метод разделения переменных) — изложен далее.

В обоих случаях можно получить некое решение $(1)–(4)$, но остается открытым вопрос о единственности. В данном случае ее нетрудно доказать при помощи следующего приема, имеющего глубокий физический смысл. Рассмотрим произвольное решение u «полуоднородной» задачи $(1)_0, (2), (3)_0, (4)_0$. Заметим, что

$$\begin{aligned} (u_t^2 + c^2 u_x^2)_t &= 2u_t u_{tt} + c^2 2u_x u_{xt} = \\ &= 2c^2 u_t u_{xx} + 2c^2 u_x u_{xt} = 2c^2 (u_t u_x)_x, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{d}{dt} \int_a^b (u_t^2 + c^2 u_x^2) dx = 2c^2 u_t u_x \Big|_{x=a}^{x=b} = 0$$

ввиду (3)₀, (4)₀. Тем самым,

$$\tilde{E} \equiv \int_a^b (u_t^2 + c^2 u_x^2) dx = \text{const} \quad (\text{т. е. не зависит от } t). \quad (5)$$

Выясним физический смысл соотношения (5). Рассмотрим малый фрагмент струны $[x, x + \Delta x]$ (см. рис. 6). Его кинетическая энергия равна $\rho \Delta x \cdot u_t^2/2$. Длина куска равна $\sqrt{(u(x + \Delta x) - u(x))^2 + \Delta x^2}$, а удлинение (по сравнению с исходным состоянием) равно

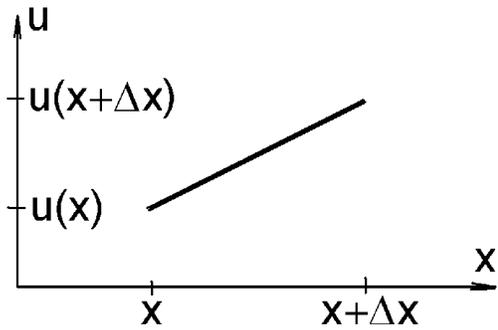


Рис. 6. Фрагмент струны

$\sqrt{(u(x + \Delta x) - u(x))^2 + \Delta x^2} - \Delta x$. Следовательно, запасенная потенциальная энергия (работа силы натяжения) равна

$$T(\sqrt{(u(x + \Delta x) - u(x))^2 + \Delta x^2} - \Delta x) \stackrel{\Delta x \rightarrow 0}{\simeq} T \Delta x (\sqrt{u_x^2 + 1} - 1) \simeq T \Delta x \frac{u_x^2}{2}.$$

Тем самым, полная энергия куска струны равна

$\Delta E = \frac{1}{2} \rho (u_t^2 + c^2 u_x^2) \Delta x$, а значит энергия всей струны составляет

$$E = \frac{\rho}{2} \int_a^b (u_t^2 + c^2 u_x^2) dx, \quad (5)'$$

что с точностью до постоянного множителя $\rho/2$ совпадает с величиной \tilde{E} из (5). Тем самым, (5) выражает тот факт, что полная энергия струны, концы которой закреплены или свободны, не меняется со временем. В частности, эту энергию можно выразить через начальную:

$$\int_a^b (u_t^2 + c^2 u_x^2) dx = \int_a^b (\psi^2 + c^2 \varphi'^2) dx. \quad (6)$$

В частности, если струна покоилась и была не возмущена в начальный момент времени ($\varphi = 0$, $\psi = 0$), то она (в отсутствие внешних сил: $f = 0$ и возмущений концов: $\chi_k = 0$, $\rho_k = 0$) не может начать движение самопроизвольно, и будет покоиться и далее. Математически это значит, что однородная задача $(1)_0$ – $(4)_0$ имеет только нулевое решение, а значит любая задача (1) – (4) не может иметь более 1 решения. Осталось показать, что 1 решение существует, что мы и сделаем с помощью метода Фурье. Не ограничивая общности, можно считать $a = 0$, тогда естественно обозначить $b = l$ (длина струны). Начнем исследование с I НКЗ, т. е. (1) , (2) , $(3)_1$, $(4)_1$, причем с полуоднородного случая $f = 0$, $\chi_k = 0$. Найдем частные решения соотношений $(1)_0$, $(3)_{10}$, $(4)_{10}$ вида $u(t, x) = a(t)b(x)$ (обратим внимание, что буквы a и b теперь заняты введенными функциями, и более не обозначают концов отрезка). Функции a и b будем искать вещественнозначные, хотя в процессе поиска временно будут привлекаться комплекснозначные функции. Подставив этот вид в $(1)_0$, получим (считая a и b ненулевыми) $a''b = c^2 ab''$,

т. е.

$$\frac{a''(t)}{c^2 a(t)} = \frac{b''(x)}{b(x)} = \lambda = \text{const},$$

или, другими словами,

$$a'' = \lambda c^2 a, \quad (7)$$

$$b'' = \lambda b, \quad (8)$$

где λ — пока произвольная постоянная. Однако если учесть (3)₁₀, (4)₁₀, то получим дополнительные условия для b :

$$b(0) = b(l) = 0. \quad (9)$$

Поэтому естественно начать с поиска b . Общее решение (8) имеет вид

$$b(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}, \quad (10)$$

если $\lambda \neq 0$, и $b(x) = C_1 x + C_2$, если $\lambda = 0$. В последнем случае из (9) получаем $b = 0$, т. е. тривиальный случай. Мы ищем нетривиальные решения, поэтому далее можно считать $\lambda \neq 0$. Подстановка (10) в (9) дает

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}l} & e^{-\sqrt{\lambda}l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Нетривиальные решения $(C_1, C_2) \neq 0$ этой системы существуют если и только если матрица в (11) вырождена: $e^{\sqrt{\lambda}l} = e^{-\sqrt{\lambda}l}$, т. е.

$$\exp(2\sqrt{\lambda}l) = 1. \quad (12)$$

Отметим, что, хотя $\lambda \in \mathbb{R}$ (поскольку все функции в исходной задаче вещественнозначны), но вообще говоря $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{C}$, так что уравнение (12) для $\sqrt{\lambda}$ следует решать в \mathbb{C} . Общее

решение (12) имеет вид $2\sqrt{\lambda}l = 2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$, т. е. $\sqrt{\lambda} = \pi ki/l$. Учитывая $(11)_1$, получаем

$$b(x) = C_1 \left(\exp\left(\frac{\pi ki}{l}x\right) - \exp\left(-\frac{\pi ki}{l}x\right) \right) = 2iC_1 \sin \frac{\pi kx}{l}.$$

Поскольку умножение b на постоянную не играет роли (эту постоянную можно отнести к a , и вообще это несущественно для поиска частных решений УКС), то можно считать $2iC_1 = 1$. Ввиду нечетности \sin не имеет смысла рассматривать $k < 0$; значение $k = 0$ также следует отбросить. В итоге остаются только $k \in \mathbb{N}$. Соответствующие λ и b естественно снабдить индексом k . Итак, получаем общее решение так наз. задачи Штурма-Лиувилля (8), (9):

$$\lambda_k = -\frac{\pi^2 k^2}{l^2}; \quad b_k(x) = \sin \frac{\pi kx}{l}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (13)$$

Отметим аналогию с линейной алгеброй: система линейных алгебраических уравнений $Ax = \lambda x$ имеет в общем положении только тривиальное решение $x = 0$, однако если λ — СЧ (СЗ) матрицы A ,

[таких чисел n штук, где $\dim A = n \times n$, с учетом кратности, при этом вообще говоря $\lambda \in \mathbb{C}$ даже если A вещественнозначная]

то существуют и нетривиальные решения, называемые СВ матрицы A . Правда, число таких СВ может быть меньше n из-за наличия кратных СЧ (точнее, многомерных жордановых клеток). Аналогично (8), (9) в общем положении имеет только тривиальное решение $b = 0$, но при некоторых λ , называемых СЗ (это в самом деле СЗ оператора d^2/dx^2 с обла-

стью определения (9)), существуют и нетривиальные решения b , называемые СФ («СВ»). В поиске СЗ и СФ и состоит задача Штурма-Лиувилля (з.Ш-Л). Ее решение для (8), (9) дается формулами (13). Отметим и следующие отличия от алгебраического случая.

1. СЗ образуют уже не конечную, а счетную систему;
2. все СЗ $\lambda_k \in \mathbb{R}$;
3. каждое СЗ однократно, т. е. ему соответствует 1 СФ (с точностью до растяжения).

[свойства 2,3 верны и в алгебраическом случае, если
 $A^* = A$]

Оказывается, эти свойства верны не только для задачи (8), (9), но и для з.Ш-Л с другими уравнениями и краевыми условиями. Более того, как в алгебраическом случае СВ

[вообще говоря, вместе с присоединенными векторами,
но если $A^* = A$, то без них]

образуют (жорданов) базис в \mathbb{R}^n , так и СФ з.Ш-Л образуют базис в том смысле, что любую функцию можно представить в виде ряда по этим СФ (не будем уточнять — в каком смысле понимается сходимость ряда, и какие классы функций допустимы). Впрочем, для функций (13)₂ это известно из теории рядов Фурье.

Теперь можно найти соответствующие $a = a_k$. Решая при $\lambda = \lambda_k$, получаем

$$a_k(t) = \alpha_k \cos \frac{c\pi kt}{l} + \beta_k \sin \frac{c\pi kt}{l}, \quad \alpha_k, \beta_k = \text{const} \in \mathbb{R},$$

т. е. общий вид искомого специального решения $(1)_0$, $(3)_{10}$, $(4)_{10}$ — следующий:

$$u(t, x) = \alpha_k \cos \frac{c\pi kt}{l} \sin \frac{\pi kx}{l} + \beta_k \sin \frac{c\pi kt}{l} \sin \frac{\pi kx}{l}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

Если теперь попытаться подставить (14) еще и в условия (2), то это приведет к успеху только для специальных φ , ψ . Но заметим, что ввиду линейности соотношений $(1)_0$, $(3)_{10}$, $(4)_{10}$ им удовлетворяют не только функции (14), но и их сумма:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \cos \frac{c\pi kt}{l} + \beta_k \sin \frac{c\pi kt}{l} \right) \sin \frac{\pi kx}{l}. \quad (15)$$

А эта функция при подходящем выборе коэффициентов α_k и β_k может удовлетворить (2). В самом деле, остается обеспечить выполнение соотношений

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin \frac{\pi kx}{l} = \varphi(x), \quad (16)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \frac{c\pi k}{l} \sin \frac{\pi kx}{l} = \psi(x). \quad (17)$$

Напомним, что функции b_k ортогональны, т. е.

$$\int_0^l b_k b_m dx = 0, \quad k \neq m, \quad \text{причем} \quad \int_0^l b_k^2 dx = \frac{l}{2},$$

так что для нахождения α_m из (16) достаточно умножить обе части ра-

венства на $\sin \frac{\pi mx}{l}$ и взять $\int_0^l dx$, что дает равенство

$\alpha_m \frac{l}{2} = \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi m x}{l} dx$, и окончательно находим

$$\alpha_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx. \quad (18)$$

Условие (18) необходимо для (16), но ввиду упомянутого факта (что b_k образуют базис) — и достаточно. Аналогично из (17) находим

$$\beta_k = \frac{2}{c\pi k} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx. \quad (19)$$

В итоге искомое решение задачи $(1)_0$, (2) , $(3)_{10}$, $(4)_{10}$ дается формулой (15), где α_k и β_k находятся из (18), (19).

Необходимо теперь научиться избавляться от условий однородности $f = 0$, $\chi_{1,2} = 0$. Начнем с первого. Решение задачи (1) , (2) , $(3)_{10}$, $(4)_{10}$ будем искать в виде ряда, аналогичного (15), но в котором вместо a_k , найденных для случая $f = 0$, стоят пока неизвестные функции a_k , а b_k — прежние (13), найденные из з.Ш-Л (8), (9), порожденной однородным уравнением $(1)_0$:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \sin \frac{\pi k x}{l}. \quad (20)$$

Строго говоря, этот прием — не более чем удобный способ поиска и представления решения (не сужающий потенциального набора решений), т. к. в виде (20) можно представить⁴

⁴Сходимость ряда и справедливость представления (20) понимается по-разному в зависимости от регулярности u .

вообще любую функцию u ; идея в том что в виде (20) решение (1), (2), (3)₁₀, (4)₁₀ просто удобнее искать (ср. метод вариации произвольной(-ых) постоянной(-ых) для решения линейных неоднородных ОДУ). Соотношения (3)₁₀, (4)₁₀ выполнены для (20) автоматически,

[если ряд (20) сходится достаточно хорошо, и в этом случае его можно почленно дифференцировать]

так что остается обеспечить (1), (2) — это означает соотношения

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k''(t) + \frac{c^2 \pi^2 k^2}{l^2} a_k(t) \right) \sin \frac{\pi k x}{l} = f(t, x);$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(0) \sin \frac{\pi k x}{l} = \varphi(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k'(0) \sin \frac{\pi k x}{l} = \psi(x),$$

эквивалентные следующим:

$$a_k''(t) + \frac{c^2 \pi^2 k^2}{l^2} a_k(t) = f_k(t), \quad a_k(0) = \varphi_k, \quad a_k'(0) = \psi_k, \quad (21)$$

где

$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(t, x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx, \quad (22)$$

$$\varphi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx, \quad \psi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx.$$

Решая (21), находим

$$\begin{aligned}
 a_k(t) = & \varphi_k \cos \frac{c\pi kt}{l} + \psi_k \frac{l}{c\pi k} \sin \frac{c\pi kt}{l} + \\
 & + \int_0^t f_k(s) \frac{l}{c\pi k} \sin \frac{c\pi k(t-s)}{l} ds.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Тем самым, искомое решение задачи (1), (2), (3)₁₀, (4)₁₀ дается формулой (20), в которой a_k приведены в (23), а φ_k , ψ_k и f_k в свою очередь выписаны в (22).

Теперь решение задачи (1), (2), (3)₁, (4)₁ в общем случае можно построить 2 способами.

Способ I. Перейдем к новой неизвестной функции v , которая будет удовлетворять задаче (1), (2), (3)₁₀, (4)₁₀, но вообще говоря с другими f , φ и ψ , с помощью замены $u = v + w$, где w — произвольная гладкая функция, удовлетворяющая (3)₁, (4)₁. Для новой функции, очевидно, получим задачу

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} = f_1 \equiv f - (w_{tt} - c^2 w_{xx}); \quad v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0;$$

$$v|_{t=0} = \varphi_1 \equiv \varphi - w|_{t=0}, \quad v_t|_{t=0} = \psi_1 \equiv \psi - w_t|_{t=0},$$

решение которой построено выше. В качестве w можно взять, например, $w(t, x) = \chi_1(t) + \frac{\chi_2(t) - \chi_1(t)}{l}x$.

Способ II. Будем по-прежнему искать решение в виде (20), но на этот раз ряд не будет вообще говоря сходиться «хорошо», т. к. иначе условия (3)₁, (4)₁ не могут выполняться. Однако они могут выполняться если сходимость ряда

(20) требовать в обобщенном смысле (ср. разложение константы по синусам). Сложность в том, что ряд (20) теперь нельзя почленно дифференцировать по x , и нужно искать a_k по следующей схеме:

$$\begin{aligned}
\frac{l}{2}a_k(t) &= \int_0^l u(t, x) \sin \frac{\pi kx}{l} dx = \\
&= -\frac{l^2}{\pi^2 k^2} \int_0^l u(t, x) \left(\sin \frac{\pi kx}{l} \right)'' dx = \\
&= -\frac{l^2}{\pi^2 k^2} u(t, x) \left(\sin \frac{\pi kx}{l} \right)' \Big|_{x=0}^{x=l} + \\
&\quad + \frac{l^2}{\pi^2 k^2} \int_0^l u_x(t, x) \left(\sin \frac{\pi kx}{l} \right)' dx = \\
&= -\frac{l}{\pi k} \chi_2(t) (-1)^k + \frac{l}{\pi k} \chi_1(t) + \frac{l^2}{\pi^2 k^2} u_x(t, x) \sin \frac{\pi kx}{l} \Big|_{x=0}^{x=l} - \\
&\quad - \frac{l^2}{\pi^2 k^2} \int_0^l u_{xx}(t, x) \sin \frac{\pi kx}{l} dx = \frac{l}{\pi k} (\chi_1 + (-1)^{k+1} \chi_2) - \\
&\quad - \frac{l^2}{c^2 \pi^2 k^2} \int_0^l (u_{tt}(t, x) - f(t, x)) \sin \frac{\pi kx}{l} dx,
\end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{c^2 \pi^2 k^2}{l^2} a_k(t) = \frac{2c^2 \pi k}{l^2} (\chi_1 + (-1)^{k+1} \chi_2) - a_k''(t) + f_k(t),$$

где f_k выписаны в $(21)_1$. Таким образом, для a_k получилось ОДУ

$$a_k''(t) + \frac{c^2 \pi^2 k^2}{l^2} a_k(t) = g_k(t), \quad (24)$$

где

$$g_k = f_k + \frac{2c^2 \pi k}{l^2} (\chi_1 + (-1)^{k+1} \chi_2), \quad (25)$$

а начальные данные будут по-прежнему иметь вид $(21)_{2,3}$. Решая задачу (24), $(21)_{2,3}$, снова получим решение исходной задачи в виде (20), где a_k задаются формулой (23), в которой следует заменить f_k на g_k (см. (25)).

Естественно, в способе I ответ получится тот же. Грубо говоря, в (20) в способе II «плохие» слагаемые (приводящие к плохой сходимости ряда (20)), порожденные членами χ_k в (25), дают в сумме функцию w из способа I, которая там была выделена в виде отдельного слагаемого (не разлагаемого по b_k), и потому оставшийся ряд в способе I сходился хорошо.

Тем самым мы полностью разобрались с I НКЗ. Решение других НКЗ буквально повторяет решение I НКЗ с той лишь разницей, что изменится з.Ш-Л (а именно, ее краевые условия (9)), а потому и вид ее СЗ и СФ. Принципиальных отличий нет.

Обсудим физический смысл найденных решений I НКЗ. При наличии внешних воздействий (ненулевых f , χ_k) струна совершает вынужденные колебания, а иначе — свободные. Последний случай описывается формулой (15); он имеет место, например, для струн музыкальных инструментов в промежутках между прикосновениями музыканта (сила тяже-

сти здесь несущественна), если время не слишком велико, и можно пренебречь угасанием колебаний из-за трения и т. п. Решение (15) представляет собой сумму так наз. гармоник

$$u_k(t, x) = \left(\alpha_k \cos \frac{c\pi kt}{l} + \beta_k \sin \frac{c\pi kt}{l} \right) \sin \frac{\pi kx}{l}. \quad (26)$$

Подсчитаем энергию этой гармоники. Имеем:

$$\begin{aligned} & (u_k)_t^2 + c^2(u_k)_x^2 = \\ & = \left(\frac{c\pi k}{l} \right)^2 \left[\left(\beta_k \cos \frac{c\pi kt}{l} - \alpha_k \sin \frac{c\pi kt}{l} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi kx}{l} + \right. \\ & \quad \left. + \left(\alpha_k \cos \frac{c\pi kt}{l} + \beta_k \sin \frac{c\pi kt}{l} \right)^2 \cos^2 \frac{\pi kx}{l} \right], \end{aligned}$$

так что согласно (5)' искомая энергия равна

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int_0^l ((u_k)_t^2 + c^2(u_k)_x^2) dx = \frac{\rho c^2 \pi^2 k^2}{4l} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \quad (27)$$

(отметим что она не зависит от времени t). Чтобы лучше понять смысл этой формулы, рассмотрим з.Ш-Л для (8) с условиями $b'(0) = b'(l) = 0$ (соответствующую II НКЗ). Она имеет решение

$$\lambda_k = -\frac{\pi^2 k^2}{l^2}, \quad k \in \mathbb{N}_0; \quad \tilde{b}_0 = 1, \quad \tilde{b}_k(x) = \cos \frac{\pi kx}{l}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (28)$$

По этим СФ можно разложить, например, функцию $c\varphi'$:

$$c\varphi'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \cos \frac{\pi kx}{l}, \quad (29)$$

где $\gamma_0 = \frac{1}{l} \int_0^l c\varphi'(x) \cdot 1 dx = 0,$

$$\left[\begin{array}{l} \text{ввиду (3)}_{10}, (4)_{10} \text{ и условий согласования} \\ \varphi(+0) = u|_{t=0, x \rightarrow +0} = u|_{x=0, t \rightarrow +0} = 0, \\ \varphi(l-0) = u|_{t=0, x \rightarrow l-0} = u|_{x=l, t \rightarrow +0} = 0, \\ \text{выражающих непрерывность } u \text{ в углах} \end{array} \right]$$

а при $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{2}{l} \int_0^l c\varphi'(x) \cos \frac{\pi kx}{l} dx = \frac{2c}{l} \varphi(x) \cos \frac{\pi kx}{l} \Big|_{x=0}^{x=l} + \\ &+ \frac{2c\pi k}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi kx}{l} dx = \frac{c\pi k}{l} \alpha_k \end{aligned}$$

(см. (18)). В разложении функции ψ :

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \sin \frac{\pi kx}{l} \quad (30)$$

коэффициенты δ_k находятся по формулам

$$\delta_k = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi kx}{l} dx = \frac{c\pi k}{l} \beta_k$$

(см. (19)). Следовательно, (27) можно переписать в виде

$$E_k = \frac{\rho l}{4} (\gamma_k^2 + \delta_k^2). \quad (31)$$

Из теории рядов Фурье известно равенство Парсеваля

$$\left[\begin{array}{l} \text{впрочем, оно очевидно из теоремы Пифагора в евкли-} \\ \text{довых пространствах} \end{array} \right]$$

$$\|c\varphi'\|_{L_2(0,l)}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \|\tilde{b}_k\|_{L_2(0,l)}^2 \gamma_k^2 = \frac{l}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2$$

и аналогично $\|\psi\|_{L_2(0,l)}^2 = \frac{l}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^2$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k = \frac{\rho}{2} \int_0^l (\psi^2 + c^2 \varphi'^2) dx \stackrel{(5)',(6)}{=} E,$$

что впрочем было естественно ожидать из физических соображений: энергия струны складывается из энергий гармоник. Если струна колеблется по закону (26) (т. е. согласно одной чистой гармонике), то минимальный период T_k колебаний каждой точки со временем находится из соотношения $\frac{c\pi k T_k}{l} = 2\pi$, т. е. $T_k = \frac{2l}{ck}$, так что частота колебаний в данной гармонике составляет $\omega_k = \frac{c}{2l}k = k\omega$, где ω — основная частота колебаний струны (частота основного тона, основной гармоники). Все ω_k не зависят от начального состояния струны (т. е. способа придания ей звучания), что является существенным для игры на струнных инструментах. Отметим, что $\omega = \frac{c}{2l} = \frac{\sqrt{T}}{2l\sqrt{\rho}}$ (в § 1 доказывалось что $c^2 = T/\rho$, где T — сила натяжения струны). Октавная высота

величина, увеличивающаяся на 1 при повышении звука на октаву, что означает увеличение частоты колебаний в 2 раза — она определяется с точностью до аддитивной константы

основного тона струны, таким образом, есть $h_{\text{окт}} = \frac{1}{2} \log_2 \frac{T}{\rho l^2}$. При малых относительных удлинениях струны (в реальных музыкальных инструментах они не превосходят 1–2%) можно считать $T = ES \left(\frac{l}{l_0} - 1 \right)$, где E — модуль Юнга материала струны, S — площадь поперечного сечения струны, l_0 — длина струны (той ее части, которая оказалась между точками натяжения) до растяжения. Изменением S при натяжении можно пренебречь. Таким образом, чтобы поднять звук на 1 октаву, можно предпринять одно из следующих действий:

1. увеличить в 4 раза натяжение (т. е. относительное удлинение $l/l_0 - 1$),
2. уменьшить в 2 раза длину,
3. уменьшить в 4 раза линейную плотность (например, в 2 раза уменьшить толщину при том же материале).

Первый прием используется при настройке инструмента, второй — во время игры (пережиманием струны на грифе и т. п.), а третий — при изготовлении струн, предназначенных для разной высоты звучания.

Помимо основного тона частотой $\omega_1 = \omega$, струна дает также так наз. обертоны с частотами $\omega_k = k\omega$, кратными основной и воспринимаемые на слух как звуки, отстоящие от основного тона на октаву, октаву с квинтой (натуральной, т. е. с частотным множителем $3/2$) и т. д. Наличие обертонов и соотношение их энергий создает тембр звучания.

Если струну дернуть резко, то ее начальные данные будут негладкими, поэтому их разложение (29), (30) имеет коэффициенты γ_k, δ_k , медленно убывающие с ростом k , т. е. энергии обертонов E_k (см. (31)) велики. Это воспринимается как дребезжащий, резкий звук. Но в любом случае γ_k, δ_k убывают с ростом k , так что обертоны не заглушают основной тон, а создают аккорд.

как минимум^a нонаккорд^b (натуральный^c).

^aНа самом деле есть и дальнейшие обертоны, которые уже плохо вписываются в схему музыкального аккорда в европейской 12-ступенчатой гамме.

^bВ очень удаленном расположении.

^cТ. е. с натуральными дробями в качестве частотных множителей, в отличие от принятой ныне системы хорошо темперированного клавира с частотными множителями вида $2^{k/12}$, $k = 1, \dots, 12$.

Тем более что высокочастотные колебания быстрее затухают вследствие потерь (из-за которых, т. е. траты энергии струны на возбуждение колебаний окружающих тел, собственно и бывает слышен звук струны).

В математической теории музыкальной игры есть множество других интересных моментов (проблема резонансов, хроматическая и натуральная настройки, и т. д.), но для них уже нет места в рамках настоящего курса.

Свойства решений I НКЗ при наличии внешних возмущений (f, χ_k) отличаются от таковых для случая нулевых f, χ_k так же, как это происходит с неоднородными и однородными ОДУ. Впрочем, ввиду представлений (20), (21), (24) это очевидно. В частности, при совпадении частот внешних воздействий с собственными возникает явление резонан-

са — неограниченное возрастание амплитуды во времени. На практике возрастание амплитуды, конечно, имеет свой предел, определяемый нелинейными эффектами, рассеянием энергии, разницей в частотах, да и, в конце концов, возможностью разрушения механизма. Но в любом случае амплитуда резонансных колебаний превосходит таковую у свободных.

Случай полуограниченной струны не представляет большого интереса, т. к. он фактически сводится к случаю неограниченной струны, изученному в § 4. Проиллюстрируем этот тезис на примере задачи (1), (2) ($x > 0, t > 0$),

$$u|_{x=0} = \chi(t). \quad (32)$$

Задача легко сводится к случаю $f = 0$ с помощью вышеизложенного принципа Дюамеля. Решение задачи (1)₀, (2), (32) можно найти с помощью формулы общего решения уравнения (1)₀. Можно отметить также следующий прием нахождения решений этой задачи: решение ищем в виде $u = v + w$, где v — решение (1)₀, (2)₀, (32), а w — решение (1)₀, (2), (32)₀, и при этом интересным является способ нахождения w . Функцию v легко находим из формулы общего решения: $v(t, x) = F(x + ct) + G(x - ct)$, где $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — пока произвольные гладкие функции. Подстановка в (2)₀, (32) дает:

$$F + G = 0 \quad \text{на } \mathbb{R}^+, \quad F' - G' = 0 \quad \text{на } \mathbb{R}^+;$$

$$F(ct) + G(-ct) = \chi(t), \quad t > 0,$$

откуда $F = \alpha = \text{const}$, $G = -\alpha$ на \mathbb{R}^+ ; $G(s) = \chi(-s/c) - \alpha$ при $s < 0$, и в итоге

$$v(t, x) = \begin{cases} 0, & x - ct > 0, \\ \chi\left(t - \frac{x}{c}\right), & x - ct < 0. \end{cases} \quad (33)$$

Функцию w (точнее, ее продолжение на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$) ищем как решение задачи Коши

$$w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0, \quad w|_{t=0} = \tilde{\varphi}, \quad w_t|_{t=0} = \tilde{\psi}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (34)$$

с некоторыми функциями $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$. Чтобы обеспечить (2), надо потребовать $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})|_{\mathbb{R}^+} = (\varphi, \psi)$, т. е. $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$ должны быть некоторыми продолжениями функций φ , ψ на всю \mathbb{R} . В то же время функция $h(t, x) = w(t, -x)$ удовлетворяет задаче, аналогичной (34), но с функциями $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(-x)$, $\tilde{\psi}(x) = \tilde{\psi}(-x)$. Мы хотим добиться $w|_{x=0} = 0$. Для этого достаточно нечетности w по x , т. е. $h = -w$, а для этого необходимо и достаточно $\tilde{\varphi} = -\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi} = -\tilde{\psi}$, т. е. нечетности $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$. Тем самым, если положить $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(|x|)\text{sgn}x$, $\tilde{\psi}(x) = \psi(|x|)\text{sgn}x$, то решение (34) и есть искомое, и его легко выписать по формуле Даламбера. Изложенный прием имеет физический смысл (и применяется во многих других задачах, см. в частности § 9): препятствие (ограничение) при $x = 0$ можно убрать, создав подходящие условия в «виртуальной» части пространства (в данном случае — в воображаемом продолжении струны).

§ 6. Задача Коши-Дирихле для одномерного уравнения теплопроводности. Преобразование Фурье

Рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + f. \quad (1)$$

Как говорилось в § 3, естественной задачей для этого уравнения является задача Коши-Дирихле,

$$\left[\begin{array}{l} \text{начальная задача, или, как ее часто не совсем точно} \\ \text{называют, задача Коши} \end{array} \right]$$

в которой к (1) добавляется начальное данное

$$u|_{t=0} = \varphi. \quad (2)$$

Решение (1), (2) ищется при $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, оно должно удовлетворять уравнению (1) при $t > 0$, а при $t \rightarrow +0$ должно удовлетворять условию (2) в смысле

$$\lim_{t \rightarrow +0, x \rightarrow x_0} u(t, x) = \varphi(x_0) \quad (3)$$

при всех $x_0 \in \mathbb{R}$. Задача (1), (2) отличается от задачи Коши для УКС многими чертами, одну из которых полезно отметить уже сейчас (некоторые из остальных будут отмечены ниже): решение (1), (2) ищется только при $t > 0$, в отличие от УКС, для которого процедура решения всех задач с равным успехом годится и для $t < 0$. И это не случайно: если УКС «обратимо во времени» (т. е. оно не меняется от замены t на $-t$, что видно и в формулах решений), то уравнение (1) чувствительно к направлению времени. В частности, задача (1), (2) при решении ее для $t < 0$ заведомо

некорректна. В самом деле, функция $u = 0$ является решением задачи (1)₀, (2) с $\varphi = 0$, а решения этой же задачи $u_k(t, x) = e^{-a^2 k^2 t} (\sin kx) e^{-k}$ с $\varphi(x) = \varphi_k(x) = (\sin kx) e^{-k}$ обладают следующим неприятным свойством: входные данные задачи $\varphi_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ равномерно (вместе со всеми производными), в то время как $u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ неверно ни в каком смысле на множестве $[-\varepsilon, 0] \times \mathbb{R}$ при сколь угодно малых ε . Таким образом, нарушено требование непрерывной зависимости решения от входных данных. Такого рода примеры, показывающие нарушение п. 4 определения корректности по Адамару, называются примерами Адамара (т. к. он первый начал их строить). С точки зрения физики это означает катастрофическое (экспоненциальное) нарастание погрешностей в начальных данных при изменении времени в обратную сторону, т. е. невозможность с удовлетворительной точностью восстановить распределение температуры (и вообще, любой диффундирующей величины) в прошлом, зная ее лишь в текущий момент времени.

Чтобы построить решение задачи (1)₀, (2) (начнем, как обычно, со случая $f = 0$), воспользуемся теорией преобразования Фурье. Рассмотрим операторы \mathcal{F} , \mathcal{F}_c и \mathcal{F}_s , действующие на функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ по формулам:

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx, \quad (4)$$

$$\mathcal{F}_c[f](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \cos(x\xi) f(x) dx, \quad (5)$$

$$\mathcal{F}_s[f](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \sin(x\xi) f(x) dx. \quad (6)$$

Они называются соответственно преобразованием Фурье, косинус-преобразованием Фурье и синус-преобразованием Фурье. Тогда $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c - i\mathcal{F}_s$. Рассмотрим также оператор $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}_c + i\mathcal{F}_s$, т. е.

$$\mathcal{F}^{-1}[g](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{iy\xi} g(\xi) d\xi, \quad (7)$$

называемый обратным преобразованием Фурье. Строго говоря, обозначение \mathcal{F}^{-1} применять некорректно до тех пор, пока мы не докажем что это в самом деле оператор, обратный к \mathcal{F} . Но поскольку в практически важных случаях это верно, то недоразумений не возникает. Отметим, что хотя все функции, участвующие в (4)–(7) (а именно, f , g , и левые части (4)–(7)) — функции вещественной переменной, причем $\mathcal{F}_c[f]$, $\mathcal{F}_s[f]$ еще и вещественнозначные, но $\mathcal{F}[f]$ и $\mathcal{F}^{-1}[g]$ — комплекснозначные. Часто также используются обозначения $\hat{f} = \mathcal{F}[f]$, $\check{g} = \mathcal{F}^{-1}[g]$. Оказывается, \mathcal{F}^{-1} в самом деле есть оператор, обратный к \mathcal{F} , т. е. $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = I$, другими словами, справедлива формула обращения преобразования Фурье

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{iy\xi} \hat{f}(\xi) d\xi \quad (8)$$

— функцию f можно восстановить по ее образу Фурье \hat{f} , вычисляемому по формуле (4). Строгое доказательство (и даже формулировка) последнего тезиса требует как мини-

мум четкой формулировки классов функций, для которых рассматриваются операторы (4)–(7), обоснования сходимости интегралов, и т. д., но мы опустим эти технические детали (которые достаточно трудоемки).

Итак,

$$\begin{aligned} I &= \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = (\mathcal{F}_c - i\mathcal{F}_s) \circ (\mathcal{F}_c + i\mathcal{F}_s) = \\ &= (\mathcal{F}_c \circ \mathcal{F}_c + \mathcal{F}_s \circ \mathcal{F}_s) + i(\mathcal{F}_c \circ \mathcal{F}_s - \mathcal{F}_s \circ \mathcal{F}_c), \end{aligned}$$

откуда $\mathcal{F}_c \circ \mathcal{F}_c + \mathcal{F}_s \circ \mathcal{F}_s = I$, т. е. для любой функции f

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \cos(\xi y) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \cos(\xi x) f(x) dx \right] d\xi + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \sin(\xi y) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \sin(\xi x) f(x) dx \right] d\xi. \end{aligned} \tag{9}$$

Формулу (9) можно вывести и «явно», непосредственно отделив вещественную и мнимую части в (8).

$$\left[\begin{array}{l} \text{при этом тот факт, что мнимая часть исчезает, нетрудно доказать непосредственно, сделав это сначала для четных или нечетных } f, \text{ а затем представив произвольную } f \text{ в виде суммы четной и нечетной функций:} \\ f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{array} \right]$$

Формула (9) выражает ту же идею, что и (8), но без использования комплексных чисел, в терминах \mathcal{F}_c и \mathcal{F}_s . Ее недостаток в том, что, в отличие от (8), в ней «перемешаны» сразу 2 преобразования. Этот недостаток исчезает, например, если

функция f четна или нечетна.

[или вовсе, как это чаще всего делается, определена только на \mathbb{R}^+ , а на \mathbb{R} затем продолжена соответствующим образом лишь для применения введенных формул]

В самом деле:

1. Если f четна, то $\mathcal{F}_s[f] = 0$, и тогда в (9) исчезает второй интеграл, т. е. для таких f верно $f = \mathcal{F}_c[\mathcal{F}_c[f]]$. При

этом $\mathcal{F}_c[f](\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos(x\xi) f(x) dx$ — также четная

функция, так что (9) можно записать в виде

$$f(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos(\xi y) \mathcal{F}_c[f](\xi) d\xi.$$

2. Если f нечетна, то $\mathcal{F}_c[f] = 0$, и тогда в (9) остается только второй интеграл, т. е. для таких f верно

$f = \mathcal{F}_s[\mathcal{F}_s[f]]$, и снова можно заменить все интегралы на $\int_0^{+\infty}$.

В определения и свойства всех описанных преобразований можно вносить чисто технические поправки, как это часто делается в литературе. Например:

- распределять множитель $1/\sqrt{2\pi}$ по-другому: $1/(2\pi)$ отнести к \mathcal{F} , а тогда для \mathcal{F}^{-1} остается 1, или наоборот;
- поменять ролями \mathcal{F} и \mathcal{F}^{-1} (т. е. знаки в экспонентах);

- в определении \mathcal{F}_c и \mathcal{F}_s оставить только $\int_0^{+\infty}$ с соответствующими поправками множителей (и их возможным перераспределением),

и т. д. Но все это не меняет упомянутых свойств этих преобразований по существу.

Наиболее удобной и универсальной является комплексная форма преобразования Фурье (4). Это преобразование имеет ряд замечательных свойств, многие из которых имеют глубокий физический смысл, что обусловило его широкое применение как в математике, так и в физике. Нам сейчас будет полезно следующее свойство:

$$\mathcal{F}[f'](\xi) = i\xi\mathcal{F}[f](\xi), \quad (10)$$

т. е. \mathcal{F} переводит операцию дифференцирования в операцию умножения на аргумент. В самом деле, если $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f'](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f'(x) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix\xi} f(x) \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} (-i\xi) dx. \end{aligned}$$

Благодаря (10) можно в линейных дифференциальных уравнениях (с постоянными коэффициентами) избавляться от производных по некоторым переменным, если, применив к этим уравнениям преобразование Фурье по этим переменным, перейти к новым уравнениям для преобразований Фурье от неизвестных решений, в которых уже вместо дифференциальных операторов по этим переменным будут стоять

алгебраические операции по новым переменным. Если проделать указанную процедуру по всем переменным кроме одной, то исходное УЧП превратится в ОДУ, которое нетрудно решить, и задача сводится к вычислению преобразований Фурье от некоторых известных функций. Покажем, как описанный метод работает в задаче (1)₀, (2). Применим к (1)₀ и (2) оператор \mathcal{F} по x , обозначив образ Фурье искомого решения через v , т. е. $v(t, \cdot) = \mathcal{F}[u(t, \cdot)]$, или, в «явном» виде:

$$v(t, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(t, x) dx.$$

Используя (10), получаем

$$\frac{dv}{dt} = -a^2 \xi^2 v; \quad v(0) = \widehat{\varphi}(\xi). \quad (11)$$

Здесь мы воспользовались возможностью дифференцировать (4) под знаком интеграла по любому параметру, отличному от x и ξ (в данном случае — по t). Величина v зависит не только от t , но и от ξ , но мы рассматриваем ξ как параметр в (11), поэтому употребляем обозначения dv/dt и $v(0)$. Решая (11), находим $v(t, \xi) = \widehat{\varphi}(\xi)e^{-a^2\xi^2t}$. Таким образом, мы нашли образ Фурье искомого решения, и остается воспользоваться формулой обращения (8):

$$\begin{aligned} u(t, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{iy\xi} \left[e^{-a^2\xi^2t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \varphi(x) dx \right] d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \left[\int_{\mathbb{R}} \exp(i\xi(y-x) - a^2\xi^2t) d\xi \right] dx = \end{aligned} \quad (12)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} A(t, y - x) \varphi(x) dx,$$

где

$$A(t, z) = \int_{\mathbb{R}} \exp(i\xi z - a^2 \xi^2 t) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \cos(\xi z) e^{-a^2 \xi^2 t} d\xi. \quad (13)$$

Здесь мы воспользовались четностью величины $e^{-a^2 \xi^2 t}$ по ξ (впрочем, исчезновение мнимой части итак очевидно ввиду вещественности u). Чтобы вычислить интеграл (13), представим A как решение некоторой задачи Коши для ОДУ по z . Имеем:

$$A|_{z=0} = \int_{\mathbb{R}} e^{-a^2 \xi^2 t} d\xi \stackrel{a\xi\sqrt{t}=\eta}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-\eta^2} \frac{d\eta}{a\sqrt{t}} = \frac{J}{a\sqrt{t}},$$

где интеграл Эйлера—Пуассона J легко вычисляется:

$$\begin{aligned} J^2 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\eta^2} d\eta \int_{\mathbb{R}} e^{-\zeta^2} d\zeta = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(\eta^2 + \zeta^2)} d\eta d\zeta \stackrel{\eta=r \cos \varphi, \zeta=r \sin \varphi}{=} \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = 2\pi \int_0^{+\infty} (e^{-r^2})' dr (-1/2) = \pi, \end{aligned}$$

т. е. $J = \sqrt{\pi}$, и поэтому $A|_{z=0} = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}$. В то же время

$$\begin{aligned} A_z &= \int_{\mathbb{R}} \sin(\xi z) (-\xi) e^{-a^2 \xi^2 t} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \sin(\xi z) (e^{-a^2 \xi^2 t})'_\xi \frac{d\xi}{2a^2 t} = \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2a^2 t} e^{-a^2 \xi^2 t} \cos(\xi z) z d\xi = -\frac{z}{2a^2 t} A. \end{aligned}$$

Решая полученную задачу Коши, легко находим

$A(t, z) = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4a^2t}\right)$, и окончательно из (12) получаем формулу решения задачи (1)₀, (2):

$$u(t, y) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}\right) \varphi(x) dx, \quad (14)$$

называемую формулой Пуассона. Эту формулу мы получили в значительной степени формально, так что, строго говоря, требуется теперь проверить, что функция (14) в самом деле является решением задачи (1)₀, (2). Но это не представляет принципиальных трудностей: выполнение (1)₀ при $t > 0$ проверяется непосредственно дифференцированием (14) под знаком интеграла — здесь ключевую роль играет тот факт, что функция

$$w(t, z) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4a^2t}\right) \quad (15)$$

[называемая фундаментальным решением (ФР) уравнения теплопроводности (1)₀]

удовлетворяет (1)₀ при $t > 0$ (формула Пуассона имеет вид свертки $u(t, y) = \int_{\mathbb{R}} w(t, x - y) \varphi(x) dx$), а выполнение (2)

(т. е. (3)) легче проверить, если переписать (14) в виде

$$u(t, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} \varphi(y + 2a\sqrt{t}z) dz \quad (16)$$

с помощью замены переменной интегрирования:

$x = y + 2a\sqrt{t}z$, и в виде (16) формула Пуассона легко допускает переход $t \rightarrow +0$.

Решение задачи (1), (2) в общем случае строится по уже знакомой схеме — разбиение неоднородной задачи на 2 полунородных и применение метода Дюамеля: $u = v + w$, где v — решение (1)₀, (2), задаваемое формулой (14), а w — решение (1), (2)₀, представимое интегралом Дюамеля

$w(t, x) = \int_0^t h(t, x; \tau) d\tau$, где h — решение задачи $h_t = a^2 h_{xx}$, $h|_{t=\tau} = f(\tau, x)$, задаваемое «смещенной» формулой Пуассона

$$h(t, y; \tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) f(\tau, x) dx,$$

так что в итоге искомое решение принимает вид

$$u(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) \varphi(y) dy + \\ + \int_0^t \left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) f(\tau, y) dy \right] d\tau, \quad (17)$$

также именуемый формулой Пуассона.

Отметим еще 1 отличие уравнения теплопроводности от УКС. Для УКС, как это хорошо видно из формулы Даламбера (см. § 4), на значение решения в точке (t, x) влияют значения начальных данных φ, ψ на интервале не шире чем $[x-ct, x+ct]$, т. е. начальные данные в точках, отстоящих от точки x более чем на ct , не успевают за время t повлиять на решение в точке x — «сигнал не успевает дойти». Это назы-

вается «конечной скоростью распространения возмущений»; и в самом деле, эта скорость равна c (скорость волны на струне). А для уравнения теплопроводности, как это хорошо видно из формулы Пуассона (14), скорость распространения возмущений бесконечна — при сколь угодно малых $t > 0$ на значения $u(t, y)$ влияют значения φ на всей \mathbb{R} .

[хотя и ничтожно мало для далеких точек ввиду крайне быстрого убывания ФР $w(t, z)$ по z , так что существующий пафос по этому поводу значительно преувеличен]

С физической точки зрения это представляется абсурдным, но это неизбежные издержки идеализации, принятой при выводе уравнения теплопроводности (см. § 1) — например, в реальности закон теплообмена нелинеен (т. е. закон Фурье неточно его описывает). Впрочем, указанное несоответствие теории и практики нетрудно устранить, учитывая упомянутый пренебрежимо малый вклад далеких точек. Например, можно задать некоторый порог погрешности ε , ниже которого вкладом соответствующих данных можно пренебречь. Оценивая (даже с закруглением) при $\alpha \geq 1$:

$$\int_{\alpha}^{+\infty} e^{-z^2} dz < \int_{\alpha}^{+\infty} ze^{-z^2} dz = \frac{e^{-\alpha^2}}{2},$$

получаем, что

$$\left[\int_{-\infty}^{-\alpha} + \int_{\alpha}^{+\infty} \right] e^{-z^2} dz < e^{-\alpha^2} \leq \varepsilon,$$

если только $\alpha \geq \sqrt{\ln(1/\varepsilon)}$, так что уже при $\varepsilon \leq 1/10$ заведомо верно использованное предположение $\alpha \geq 1$. Таким

образом, с относительной погрешностью не более ε можно модифицировать интеграл (16), отбросив слишком далекие и вносящие ничтожно малый вклад точки:

$$u(t, y) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-z^2} \varphi(y + 2a\sqrt{t}z) dz.$$

Но в таком случае на значения $u(t, x)$ влияют значения функции φ на отрезке не шире чем $[x - 2a\sqrt{t}\alpha, x + 2a\sqrt{t}\alpha]$, а область влияния начальных данных в точке $y \in \mathbb{R}$ не шире

чем внутренность параболы $y - 2a\sqrt{t}\alpha \leq x \leq y + 2a\sqrt{t}\alpha$ (см. рис. 7). Таким образом, скорость распространения возмущений при такой модифицированной постановке получилась конечной, равной (см. § 1)

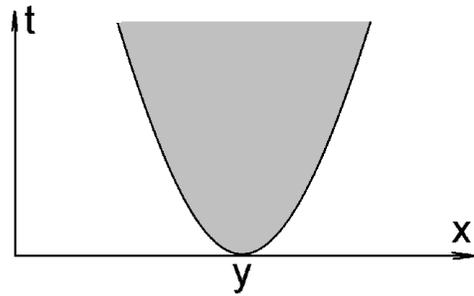


Рис. 7. Область влияния

$$v(t) = \frac{d}{dt} 2a\sqrt{t}\alpha = \frac{a\alpha}{\sqrt{t}} = \alpha \sqrt{\frac{\varkappa}{c\rho t}}$$

(она бесконечна только в начальный момент времени). Несколько необычно выглядит непостоянство v , но это связано с фиксацией начального момента, влияние данных при котором рассматривается. При фиксации другого начального момента произойдет и соответствующий сдвиг скорости. Интересно, что по мере удаления фронта от точки (т. е. со временем) его скорость снижается. Зависимость фронта возмущений от выбора ε не слишком существенна: так, при $\varepsilon = 1/10$ получим $\alpha \approx 1.52$, а при $\varepsilon = 10^{-6}$ получается $\alpha \approx 3.72$.

§ 7. Одномерное уравнение теплопроводности: автомодельные решения, некоторые краевые задачи

Полученные в предыдущем параграфе параболические кривые движения фронта возмущений решений одномерного уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + f \quad (1)$$

наводят на мысль, что кривые вида $x - x_0 = \text{const} \sqrt{t - t_0}$ могут играть роль линий уровня решений уравнения (1)₀, т. е. решения можно искать в виде (пусть, например, $(t_0, x_0) = 0$) $u(t, x) = h(x/\sqrt{t})$. Такие решения называются автомодельными (т. е. самоподобными⁵). Они могут быть полезны при решении как задачи Коши-Дирихле для (1) с условием

$$u|_{t=0} = \varphi, \quad (2)$$

так и многих других краевых задач. Это семейство можно обобщить: $u(t, x) = t^\alpha h(x/\sqrt{t})$, $\alpha = \text{const}$. Подставляя этот вид в (1)₀, легко вывести ОДУ для функции h :

$$a^2 h''(z) + \frac{1}{2} z h'(z) - \alpha h(z) = 0, \quad (3)$$

которое при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ можно решить (правда, в квадратурах только при $\alpha \in \mathbb{Z}$) и тем самым построить автомодельные решения, образующие богатый класс частных решений

⁵Имеется в виду подобие (совпадение) исходной функции и функции, получаемой синхронным масштабированием переменных.

и потому позволяющие решать некоторые начально-краевые задачи для (1)₀. Проиллюстрируем этот тезис на примере задачи Стефана, описывающей движение фронта фазового перехода, например, превращения воды в лед. Будем рассматривать простейший одномерный случай, соответствующий, например, замерзанию воды в водоеме при отсутствии конвекции⁶ и при отсутствии зависимости параметров от горизонтальных координат (см. рис. 8). Температура (в градусах Цельсия) воды $u_2 = u_2(t, x)$ и льда $u_1 = u_1(t, x)$, где t — время, x — глубина (на поверхности водоема $x = 0$). В момент $t = 0$ вода вся находится в жидком состоянии при температуре $\theta^+ > 0$, но благодаря постоянно поддерживаемой температуре $\theta^- < 0$ на поверхности водоем начинает промерзать, т. е. граница $x = \xi(t)$ между льдом (занимающим область $0 < x < \xi(t)$) и водой (занимающей область $\xi(t) < x < +\infty$) движется вниз (ξ возрастает). В каждой из фаз (вода и лед) температура подчиняется уравнению (1)₀, но со своими коэффициентами $a_{1,2}$. На границе раздела фаз температура нулевая, а скорость выделения тепла при замерзании воды определяется разницей потоков тепла, приходящих из двух фаз.

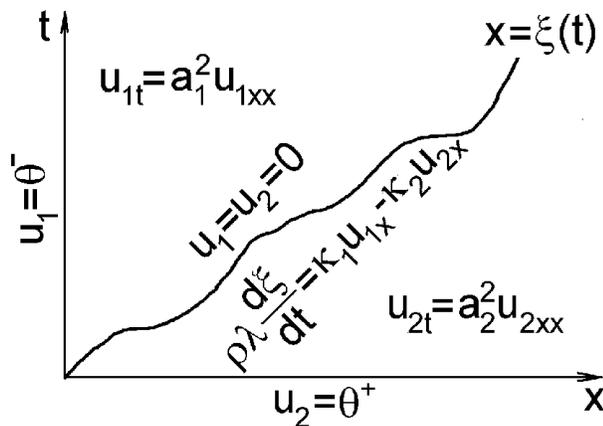


Рис. 8. Задача Стефана

⁶Конвекцию можно не учитывать в водоеме со стоячей замерзающей водой в силу аномальной зависимости плотности воды от температуры.

В итоге получаем следующую задачу:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \xi(t), \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad \xi(t) < x < +\infty, \quad (5)$$

$$u_1|_{x=0} = \theta^-, \quad (6)$$

$$u_2|_{t=0} = \theta^+, \quad (7)$$

$$u_1 = u_2 = 0, \quad \rho\lambda \frac{d\xi}{dt} = \kappa_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \kappa_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad \text{при } x = \xi(t), \quad (8)$$

$$\xi(0) = 0. \quad (9)$$

Здесь $\kappa_{1,2}$ — теплопроводность льда и воды соответственно; ρ — плотность льда,

[$\rho = \rho_1$ — это линейная плотность в столбе сечением S ,
 который приходится временно выбирать, в конце мы от
 него избавимся]

λ — удельная (массовая) теплота плавления льда. Корректность задачи (4)–(9) по Адамару — нетривиальный вопрос,

[к тому же это не просто НКЗ в смысле § 3, а задача с]
 [неизвестной (свободной) границей]

так что мы не будем им заниматься — по крайней мере, не будем доказывать единственность, а ограничимся построением одного решения. Будем искать его в автомодельном виде. Подстановка выражения $u_1(t, x) = t^\alpha h_1(x/\sqrt{t})$ (условие (9) диктует несмещенность) в (6) дает $\alpha = 0$, а тогда из (8)₁ получаем $\xi(t)/\sqrt{t} = \text{const}$, т. е.

$$\xi(t) = 2\gamma\sqrt{t}, \quad (10)$$

где $\gamma \in \mathbb{R}^+$ подлежит определению. Но теперь подстановка выражения $u_2(t, x) = t^\alpha h_2(x/\sqrt{t})$ в $(8)_1$ также дает $\alpha = 0$.

Таким образом, обе функции u_1, u_2 — автомодельные решения с $\alpha = 0$, так что нам достаточно решить (3) при $\alpha = 0$, что легко сделать и получить

$$h(z) = C_1 + C_2 E\left(\frac{z}{2a}\right), \quad (11)$$

где $C_{1,2}$ — произвольные постоянные, а $E(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-s^2} ds$

— функция Гаусса. Нам важно будет знать ее свойства:

$E(-\infty) = 0$, $E(0) = 1/2$, $E(+\infty) = 1$, E монотонно возрастает. Таким образом,

$$u_1(t, x) = C_1 + C_2 E\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right), \quad u_2(t, x) = C_3 + C_4 E\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right), \quad (12)$$

где $C_k \in \mathbb{R}$ подлежат определению. Представление (12) автоматически обеспечивает выполнение (4) и (5). Таким образом, остается найти 5 констант $C_1, C_2, C_3, C_4, \gamma$, для которых имеются 5 уравнений (6)–(8), принимающие вид

$$\begin{aligned} C_1 + \frac{C_2}{2} &= \theta^-, & C_3 + C_4 &= \theta^+, \\ C_1 + C_2 E\left(\frac{\gamma}{a_1}\right) &= 0, & C_3 + C_4 E\left(\frac{\gamma}{a_2}\right) &= 0, \\ 2\rho\lambda\gamma &= \frac{\varkappa_1 C_2 E'\left(\frac{\gamma}{a_1}\right)}{a_1} - \frac{\varkappa_2 C_4 E'\left(\frac{\gamma}{a_2}\right)}{a_2}. \end{aligned}$$

Решая первые 4 уравнения относительно C_k , получаем

$$C_1 = \frac{2E(\gamma/a_1)}{2E(\gamma/a_1) - 1} \theta^-, \quad C_2 = -\frac{2}{2E(\gamma/a_1) - 1} \theta^-,$$

$$C_3 = \frac{-E(\gamma/a_2)}{1 - E(\gamma/a_2)}\theta^+, \quad C_4 = \frac{1}{1 - E(\gamma/a_2)}\theta^+,$$

и остается подставить эти выражения в последнее уравнение:

$$2\rho\lambda\gamma = -\frac{\varkappa_1 E'(\gamma/a_1)\theta^-}{a_1(E(\gamma/a_1) - 1/2)} - \frac{\varkappa_2 E'(\gamma/a_2)\theta^+}{a_2(1 - E(\gamma/a_2))}, \quad (13)$$

откуда следует найти γ , а тогда и все C_k . Рассмотрим функцию

$$\varphi(s) = \varkappa_2\theta^+ \ln \left(1 - E \left(\frac{\sqrt{s}}{a_2} \right) \right) + \varkappa_1(-\theta^-) \ln \left(E \left(\frac{\sqrt{s}}{a_1} \right) - \frac{1}{2} \right).$$

Поскольку $\frac{d}{d\gamma}\varphi(\gamma^2)$ есть правая часть (13), то (13) принимает вид

$$\frac{d\varphi(s)}{ds} = \rho\lambda, \quad \text{где } s = \gamma^2. \quad (14)$$

Поскольку $\varphi(+0) = \varphi(+\infty) = -\infty$, то существует хотя бы 1 решение $s_* = s_*(\rho\lambda, \varkappa_2\theta^+, -\varkappa_1\theta^-, a_1, a_2)$ уравнения (14),

[единственность доказывать не будем, отметим лишь что
для нее достаточно вогнутости φ]

так что искомое $\gamma = \gamma_* = \sqrt{s_*}$. Скорость фронта замерзания

$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\gamma_*}{\sqrt{t}}$ со временем снижается, благодаря чему промерзание водоемов замедляется со временем (конвекция исключается, как упоминалось выше). Величину γ_* не удастся явно

выразить через параметры задачи, но на практике ее можно находить численно как максимизирующее значение для

функции $\varphi(s) - \rho\lambda s$; для этого лучше переписать эту задачу в безразмерных переменных: обозначим $s = a_1^2 z = \frac{\varkappa_1}{c_1\rho_1} z$

(где c_1 — массовая теплоемкость льда, см. § 1), тогда задача

сводится к поиску безразмерного параметра z , а указанная задача максимизации принимает вид:

$$\frac{\kappa_2}{\kappa_1} \ln \left(1 - E \left(\sqrt{\frac{c_2 \rho_2 \kappa_1}{c_1 \rho_1 \kappa_2}} \sqrt{z} \right) \right) + \\ + \frac{-\theta^-}{\theta^+} \ln \left(E(\sqrt{z}) - \frac{1}{2} \right) - \frac{\lambda}{c_1 \theta^+} z \rightarrow \max,$$

откуда, в частности, видно, что движение фронта замерзания (т. е. параметр z) зависит от безразмерных параметров

$$\frac{\kappa_2}{\kappa_1}, \quad \frac{-\theta^-}{\theta^+}, \quad \sqrt{\frac{c_2 \rho_2 \kappa_1}{c_1 \rho_1 \kappa_2}} \quad \text{и} \quad \frac{\lambda}{c_1 \theta^+},$$

равных для воды (вблизи 0°C) соответственно

$$0.25, \quad \frac{-\theta^-}{\theta^+}, \quad 2.958 \quad \text{и} \quad \frac{156.4^\circ\text{C}}{\theta^+}.$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{т. к. (в системе СИ) } \kappa_2^* = 0.561, \kappa_1^* = 2.25, \kappa_k = \kappa_k^* S, \\ c_2 = 4217, c_1 = 2110, \rho_2^{\text{об}} = 999.8, \rho_1^{\text{об}} = 916.4, \lambda = 330000 \end{array} \right]$$

Например, при $\theta^+ = 4^\circ\text{C}$, $\theta^- = -10^\circ\text{C}$ получим

$z = z_{10} = 0.0284$, а при $\theta^- = -20^\circ\text{C}$ получим

$z = z_{20} = 0.0567$, и поскольку $\frac{\kappa_1}{c_1 \rho_1} = 1.16 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, то

$s_{10} = 3.31 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$, $s_{20} = 6.6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$; промерзание на

$\xi_0 = 1 \text{ м}$ займет время $\frac{\xi_0^2}{4\gamma^2} = \frac{\xi_0^2}{4s}$, т. е. в данном случае со-

ответственно $7.55 \cdot 10^6 \text{ с} = 87 \text{ сут}$ и $3.79 \cdot 10^6 \text{ с} = 44 \text{ сут}$; для

образования полуметрового слоя льда нужно в 4 раза меньше времени, т. е. 22 и 11 сут соответственно.

Решения НКЗ для одномерного уравнения теплопроводности $(1)_0$ на конечном отрезке по пространству (постановку см. в § 3) могут быть построены методом Фурье аналогично

тому, как это делалось для УКС в § 5. Например, простейшая задача для уравнения (1)₀ с начальными данными (2) (при $x \in (0, l)$) и краевыми условиями

$$u|_{x=0,l} = 0 \quad (15)$$

приводит к той же задаче Штурма-Лиувилля

$$b'' = \lambda b, \quad b(0) = b(l) = 0$$

с решением $\lambda_k = -\frac{\pi^2 k^2}{l^2}$, $b_k(x) = \sin \frac{\pi k x}{l}$, $k \in \mathbb{N}$; но на этот раз в частных решениях $u_k = a_k(t)b_k(x)$ функции a_k будут удовлетворять уравнению $a'_k = -\frac{\pi^2 k^2 a^2}{l^2} a_k$, откуда

$a_k(t) = C_k \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2 a^2 t}{l^2}\right)$, т. е. решение (1)₀, (2), (15) имеет вид

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2 a^2 t}{l^2}\right) \sin \frac{\pi k x}{l}, \quad (16)$$

где $\sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{\pi k x}{l} = \varphi(x)$, т. е. $C_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx$.

Но несмотря на аналогию в методах получения решения (16) и соответствующей задачи для УКС, свойства решений принципиально различаются. Так, для УКС колебания не затухают со временем, а сохраняют постоянную амплитуду, энергию и т. п., в то время как решения (16) быстро стремятся к 0 (в общем случае неоднородных условий (15) — к решению стационарной задачи, описывающей предельное линейное распределение температуры). В самом деле, даже

при грубой оценке:

$$|C_k| \leq \frac{2}{l} \|\varphi\|_{L_1(0,l)};$$

$$\begin{aligned} |u(t, x)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{l} \|\varphi\|_{L_1(0,l)} \left[\exp\left(-\frac{\pi^2 a^2 t}{l^2}\right) \right]^k = \\ &= \frac{2}{l} \|\varphi\|_{L_1(0,l)} \frac{\exp\left(-\frac{\pi^2 a^2 t}{l^2}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{\pi^2 a^2 t}{l^2}\right)} \leq \frac{4}{l} \|\varphi\|_{L_1(0,l)} \exp\left(-\frac{\pi^2 a^2 t}{l^2}\right) \end{aligned}$$

(если $t \geq \frac{l^2 \ln 2}{\pi^2 a^2}$) видна экспоненциальная скорость (равномерного по x) стремления $u \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. При $t \geq \frac{l^2 c \rho}{\pi^2 \kappa} \ln \frac{4 \|\varphi\|_{L_1(0,l)}}{l \varepsilon}$ можно гарантировать $|u| \leq \varepsilon$. Физический смысл этого явления в том, что (в отличие от УКС) в задаче (1)₀, (2), (15) нет сохранения энергии: тепло быстро утекает через концы стержня, поддерживаемые при определенной температуре. Если концы теплоизолированы, т. е. (15) заменяется на условия II рода, то сохранение энергии имеет место:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^l c \rho u dx = c \rho \int_0^l u_t dx = c \rho \int_0^l a^2 u_{xx} dx = \kappa u_x \Big|_0^l = 0.$$

Но и в этом случае (ввиду отсутствия внешних источников тепла f) также происходит быстрое перераспределение температуры в стержне, а именно экспоненциальная стабилизация решения к соответствующему стационарному решению, как это легко получить, выписав решение явно с помощью

метода Фурье (см. аналогичную задачу в § 5) — энергия сохраняется, перераспределяясь равномерно по стержню.

Пример. Слой льда толщиной 1 м, с обеих сторон поддерживается определенная температура, принятая за 0, начальное распределение отличается от этой температуры в пределах 10°C. Оценить время стабилизации температуры до пределов 1°C.

Решение: $\frac{4\|\varphi\|_{L_1(0,l)}}{l\varepsilon} \simeq 40; \frac{l^2 c\rho}{\pi^2 \kappa} = \frac{l^2 c\rho_{об}}{\pi^2 \kappa_*} \approx 87078 \text{сек} \implies T \simeq 3.72 \text{сут.} \quad \square$

В заключение параграфа рассмотрим еще 1 задачу, нестандартную с математических позиций и имеющую важные приложения: задачу о распределении температуры в почве (задачу о тепловых волнах). Эта температура описывается уравнением (1)₀ (где x — глубина) при $x > 0, t \in \mathbb{R}$, а на поверхности почвы температура предполагается известной:

$$u|_{x=0} = U(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} U_k \exp\left(\frac{2\pi}{T}ikt\right). \quad (17)$$

Здесь T — период самых медленных колебаний температуры (если пренебречь многолетними осцилляциями, которые невелики, то можно считать $T = 1$ год). Функция U предполагается T -периодической, что автоматически гарантирует ее представимость рядом Фурье (17). Коэффициенты Фурье, очевидно, находятся по формулам

$$U_k = \frac{1}{T} \int_0^T U(t) \exp\left(-\frac{2\pi ikt}{T}\right) dt.$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{получаемым умножением обеих частей (17) на} \\ \exp\left(-\frac{2\pi imt}{T}\right) \text{ и интегрированием от } 0 \text{ до } T \end{array} \right]$$

Хотя U вещественнозначная, но $U_k \in \mathbb{C}$; впрочем, можно представить их в виде $U_k = V_k - iW_k$, где

$$V_k = \frac{1}{T} \int_0^T U(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt,$$

$$W_k = \frac{1}{T} \int_0^T U(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt,$$

так что (17) принимает классический вид

$$U(t) = U_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[V_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + W_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right],$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{здесь мы использовали очевидные факты } V_{-k} = V_k, \\ W_{-k} = -W_k \end{array} \right]$$

но с представлением (17) удобнее работать. Чтобы найти решение (1)₀, (17), надо найти решение для каждого слагаемого в (17) и затем сложить эти решения. Будем искать такие «кусочные решения» в виде $u = m(t)b(x)$, тогда

$$m(t)b(0) = U_k \exp\left(\frac{2\pi}{T}ikt\right), \text{ т. е. } m(t) = \text{const} \exp\left(\frac{2\pi}{T}ikt\right)$$

(const можно считать равной 1 без потери общности), но тогда

$$\text{гда } \frac{b''}{b} = \frac{m'}{a^2 m} = \frac{2\pi ik}{Ta^2}, \text{ откуда при } k \neq 0$$

$$b(x) = C_1 \exp\left(\sqrt{\frac{\pi}{T}} \frac{1}{a} \sqrt{2ikx}\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{\pi}{T}} \frac{1}{a} \sqrt{2ikx}\right). \quad (18)$$

Случай 1: $k = 0$. Тогда $b'' = 0 \implies b = C_1x + C_2$,
 $u = (C_1x + C_2) \cdot 1$. Условие $u|_{x=0} = U_0$ не позволяет найти $C_{1,2}$. Значит, нужно какое-то дополнительное условие в задаче, с помощью которого мы сузили бы класс решений. Из физического смысла ясно, что следует отбросить решения, неограниченно растущие при $x \rightarrow +\infty$, т. е. добавить к (1)₀, (17) условие

$$u(t, x) \text{ ограничена при } x \rightarrow +\infty. \quad (19)$$

Тогда получим $b = C_2$, $u = C_2 = U_0$.

Случай 2: $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\sqrt{2ik} = (1 + i)\sqrt{k}$, и в формуле (18) следует отбросить первое слагаемое как не удовлетворяющее (19). В итоге

$$u = U_k \exp \left(-\sqrt{\frac{\pi k}{T}} \frac{1}{a} (1 + i)x \right) \exp \left(\frac{2\pi}{T} ikt \right).$$

Случай 3: $-k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sqrt{2ik} = \sqrt{|k|} \sqrt{-2i} = (-1 + i)\sqrt{|k|},$$

в формуле (18) следует отбросить второе слагаемое, т. е.

$$u = U_k \exp \left(\sqrt{\frac{\pi |k|}{T}} \frac{1}{a} (-1 + i)x \right) \exp \left(\frac{2\pi}{T} ikt \right).$$

В результате решение всей задачи (1)₀, (17), (19) принимает вид

$$\begin{aligned}
 u(t, x) = & U_0 + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \exp \left(-\sqrt{\frac{\pi k x}{T a}} \right) \exp \left(\frac{2\pi k i t}{T} - \sqrt{\frac{\pi k x}{T a}} i \right) + \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} U_{-m} \exp \left(-\sqrt{\frac{\pi m x}{T a}} \right) \exp \left(-\left(\frac{2\pi m i t}{T} - \sqrt{\frac{\pi m x}{T a}} i \right) \right).
 \end{aligned} \tag{20}$$

Ввиду выписанных выше представлений для U_k можно записать (20) в вещественном виде:

$$\begin{aligned}
 u(t, x) = & U_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left(-\sqrt{\frac{\pi k x}{T a}} \right) \times \\
 & \times \left[V_k \cos \left(\frac{2\pi k t}{T} - \sqrt{\frac{\pi k x}{T a}} \right) + W_k \sin \left(\frac{2\pi k t}{T} - \sqrt{\frac{\pi k x}{T a}} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Ясно, что U_0 есть среднегодовая температура на поверхности: $U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T U(t) dt$, и она же будет среднегодовой температурой на любой глубине x , т. е. среднее по t от сумм в (20) равно 0. При этом колебания температуры на глубине x происходят по тому же закону, что и на поверхности, но с

опозданием на время $t_k^*(x) = \sqrt{\frac{T x}{\pi k 2a}}$ и с амплитудой, составляющей долю $a_k(x) = \exp \left(-\sqrt{\frac{\pi k x}{T a}} \right)$ от поверхностной. Быстрые колебания затухают с глубиной быстрее, и

меньше опаздывают. Наиболее интересна главная гармоника ($k = 1$), соответствующая сезонным колебаниям температуры:

[поскольку следующая гармоника соответствует $k = 2$, т. е. полугодиям, то здесь следует говорить о годовых колебаниях температуры, усредненной за полугодие]

Обоснование для преподавателя. Средняя температура за полугодие равна

$$\frac{1}{T/2} \int_{t-T/4}^{t+T/4} U(s) ds = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2U_k}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) \exp\left(\frac{2\pi i k t}{T}\right)$$

— сумма нулевой и всех нечетных гармоник, из которых главная ($k = \pm 1$) равна $\frac{2}{\pi} \times$ (первая гармоника в (17)), т. е. первая гармоника в рядах вида (17) — это $\frac{\pi}{2} \times$ (среднее по полупериоду) с точностью до высших нечетных гармоник.

$$t_1^*(x) = \sqrt{\frac{T}{\pi} \frac{x}{2a}} = \sqrt{\frac{T c \rho_{об}}{\pi \kappa_*} \frac{x}{2}}; \quad a_1(x) = \exp\left(-\sqrt{\frac{\pi c \rho_{об}}{T \kappa_*}} x\right).$$

Например, для глинозема $\kappa_* = 2.33$, $c = 800$, $\rho_{об} = 1800$ (в системе СИ), так что

$$\sqrt{\frac{T c \rho_{об}}{\pi \kappa_*}} = 2.49 \cdot 10^6 \frac{\text{сек}}{\text{м}}, \quad \sqrt{\frac{\pi c \rho_{об}}{T \kappa_*}} = 0.248 \text{м}^{-1},$$

и на глубине $x = 4\text{м}$ получим опоздание $t_1^* = 58\text{сут}$, а сокращение амплитуды $a_1 = 0.37$. В Новосибирске $U_0 = 1^\circ\text{C}$, амплитуда среднеполугодовой температуры $U_1 = 14^\circ\text{C}$, так что на глубине 4м амплитуда будет уже около 5°C , т. е. температура колеблется в пределах $[-4^\circ\text{C}, +6^\circ\text{C}]$ (имеет значение только годовая гармоника, т. к. высокочастотные коле-

бания сюда уже не доходят). Описанные явления наблюдаются, например, в погребах. На большой глубине температура практически не меняется и равна среднегодовой в данной местности. В частности, если она ниже нуля, то имеет место явление вечной мерзлоты (при котором летом может оттаивать только верхний слой почвы).

§ 8. Импульсная функция Дирака (δ -функция). Функция Грина

Пусть мы имеем возможность воздействовать силой на некоторое тело (например, тележку на рельсах). При этом наша задача — придать телу импульс равный 1, но время, отведенное на это, крайне ограничено. Для определенности пусть воздействие силы должно начаться в момент $t = 0$ и закончиться к моменту $t = \varepsilon$. Сила, которая действует на тело, есть $F = F(t)$, так что $F(t) = 0$ при $t < 0$ и $t > \varepsilon$. Сообщенный телу к моменту времени t импульс равен

$$N(t) = \int_0^t F(s)ds; \quad N(\varepsilon) = 1. \quad (1)$$

Один из возможных способов изменения силы и импульса со временем изображен на рис. 9.

Строго говоря, графики F и N между 0 и ε могут быть любыми, но площадь под графиком F должна быть равной 1 , а график N непрерывен.

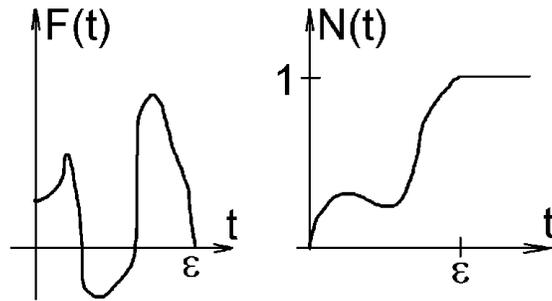


Рис. 9. Короткий импульс

Простейший случай: $F(t) = 1/\varepsilon$, $N(t) = t/\varepsilon$ при $t \in (0, \varepsilon)$; в общем случае можно говорить о средней силе $F^* = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} F(t) dt = \frac{1}{\varepsilon}$, необходимой для приданию телу искомого импульса $N = 1$.

Пусть теперь время воздействия $\varepsilon \rightarrow 0$. На практике это, конечно, невозможно довести до конца, т. к. потребуются бесконечная сила, но данная ситуация моделирует такое малое время, что трудно (или нет необходимости) разобраться что происходит внутри этого малого промежутка времени, так что он считается одним мгновением. При $\varepsilon \rightarrow 0$ поведение N легко описать — это ступенчатая функция θ (функция Хевисайда). А как описать предельную силу?

[обозначим эту предельную силу через $\delta(t)$]

На этот вопрос можно ответить следующими способами:

1. Поскольку из (1) $F = N'$, то и в пределе $F = \delta$ есть производная от ступенчатой функции, т. е. такая что

$\delta = 0$ всюду кроме 0, $\delta(0) = +\infty$, и

$$\int_a^b \delta(t) dt = \int_a^b \theta'(t) dt = \theta \Big|_a^b = 1 \quad \text{для любого } (a, b) \ni 0.$$

2. δ есть такая функция что ее график всюду кроме 0 имеет нулевую высоту, а в 0 — бесконечную, так что площадь «столбика» равна 1 (график символически изображен на рис. 10).

Конечно, оба ответа неудовлетворительны с математической точки зрения. В математике имеется так наз. теория обобщенных функций (распределений), в которой придается строгий смысл в т. ч. и этой δ -функции.

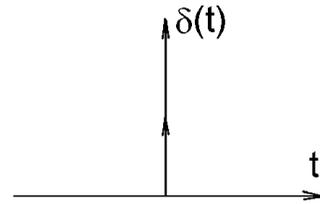


Рис. 10. δ -функция

Но для целей моделирования физических явлений достаточно приведенных интуитивных соображений. Нам достаточно будет понимать, что δ -функция описывает такое изменение силы во времени, при котором эта сила мгновенно создает единичный импульс (отсюда название «импульсная функция»).

Также важно следующее свойство δ -функции (кстати, лежащее в основе ее строгой математической трактовки): рассмотрим произвольную непрерывную функцию h и подсчитаем интеграл $J(t_0) = \int_{\mathbb{R}} \delta(t-t_0)h(t)dt$. Для этого приблизим

δ -функцию импульсами конечной длительности:

$F_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \chi_{[t_0, t_0 + \varepsilon]}(t)$, $F_\varepsilon(t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(t - t_0)$, тогда

$$J(t_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} F_\varepsilon(t) h(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} h(t) dt = h(t_0).$$

Итак,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) h(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t_0 - t) h(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(s) h(s + t_0) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(s) h(t_0 - s) ds = h(t_0). \end{aligned} \tag{2}$$

Формула (2) имеет тот смысл, что любое воздействие можно представить как совокупность элементарных (мгновенных) воздействий. Если процесс линейный, то для него верен принцип суперпозиции, а значит для решения в случае произвольного воздействия достаточно изучить случай элементарного (мгновенного) воздействия.

Проиллюстрируем последний тезис на примере. Пусть известно, чтодвигающая прямолинейно тележка массой m в момент $t = 0$ находилась в точке $x = 0$, а в момент $t = T$ оказалась в точке $x = \alpha$, причем известна сила $f(t)$, действовавшая на тележку. Требуется найти закон движения тележки. Данная задача записывается в виде краевой задачи для ОДУ:

$$x'' = f/m; \quad x(0) = 0, \quad x(T) = \alpha. \tag{3}$$

Решение можно легко найти непосредственно: сначала найдем общее решение уравнения (3)₁:

$$x(t) = \int_0^t (t - \xi) \frac{f(\xi)}{m} d\xi + at + b,$$

а затем находим a , b из (3)_{2,3}, так что окончательно

$$x(t) = \frac{\alpha t}{T} + \int_0^T g_0(t, \xi) \frac{f(\xi)}{m} d\xi, \quad (4)$$

где

$$g_0(t, \xi) = \frac{1}{T} \begin{cases} (t - T)\xi, & \xi < t \\ (\xi - T)t, & \xi > t. \end{cases} \quad (5)$$

В частности, при $\alpha = 0$ получим

$$x(t) = \int_0^T g_0(t, \xi) \frac{f(\xi)}{m} d\xi. \quad (6)$$

[к этому случаю легко было сразу свести задачу (3), сделав замену $x = y + \alpha t/T$, т. к. величина $\alpha t/T$ как раз удовлетворяет (3)_{2,3} и (3)₁₀]

Попробуем теперь получить тот же ответ, представив внешнюю силу как совокупность мгновенных воздействий, т. е. используя (2):

$$\frac{f(t)}{m} = \int_0^T \frac{f(\xi)}{m} \delta(t - \xi) d\xi. \quad (7)$$

Другими словами, решим задачу для мгновенного воздействия в момент ξ :

$$x''(t) = \delta(t - \xi); \quad x(0) = x(T) = 0 \quad (8)$$

— ее решение обозначим $g(t, \xi)$, а тогда ввиду линейности задачи (3) (при $\alpha = 0$, относительно f) и ввиду (7) решение для любых f будет как раз представляться в виде

$$x(t) = \int_0^T g(t, \xi) \frac{f(\xi)}{m} d\xi; \text{ при этом должно получиться } g = g_0.$$

Найдем общее решение $(8)_1$: $x'(t) = \theta(t - \xi) + a$,
 $x(t) = (t - \xi)\theta(t - \xi) + at + b$. Из $(8)_{2,3}$ находим $b = 0$,
 $a = (\xi - T)/T$, так что в итоге $g = g_0$, и искомое представление совпадает с (6). Функция $g = g_0$ называется функцией Грина задачи (3). Ее смысл — решение задачи с однородными краевыми условиями, в которой внешнее воздействие представляет собой мгновенный импульс в момент ξ . Как видно, с ее помощью можно представить решение задачи с однородными краевыми условиями и произвольной правой частью. При этом случай неоднородных краевых условий также можно получить с помощью функции Грина — покажем это на примере (3) и заодно еще раз обоснуем (4).

Пусть $x = x(t)$ — искомое решение, а $g = g(t, \xi)$ — функция Грина, т. е. решение (8). Рассмотрим тождество

$$x''g - xg_t'' = (x'g - xg_t')_t$$

и возьмем $\int_0^T dt$:

$$\int_0^T \frac{f(t)}{m} g(t, \xi) dt - \int_0^T x(t) \delta(t - \xi) dt = -x(T)g_t'(T, \xi),$$

т. е.

$$x(\xi) = \alpha g'_t(T, \xi) + \int_0^T \frac{f(t)}{m} g(t, \xi) dt. \quad (9)$$

Заметим, что до сих пор мы не использовали представление решения (5) задачи (8), а лишь пользовались самим определением (8). Но теперь, зная (5), находим $g'_t(T, \xi) = \xi/T$, а также замечаем что $g(t, \xi) = g(\xi, t)$, так что (9) превращается в (4).

В задаче (3), казалось бы, не было необходимости привлекать понятие функции Грина, решать задачу (8) и т. д., т. к. решение (4) получилось непосредственно. Но польза в том, что в более сложных задачах, где «непосредственный» поиск решения затруднителен, его можно найти по аналогичному алгоритму — разбиению внешних воздействий на элементарные (т. е. с помощью функции Грина). Поясним эту мысль на примере оператора Лапласа, но прежде сделаем вспомогательные построения.

Аналогично одномерному случаю, в многомерном пространстве также можно ввести понятие δ -функции. Грубо говоря, это такая функция, которая везде равна 0 кроме 0, в 0 равна $+\infty$, а интеграл от нее по \mathbb{R}^n равен 1. Это предельный случай функций вида $\frac{1}{\text{mes}B(0, \varepsilon)} \chi_{B(0, \varepsilon)}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

впрочем, как и в одномерном случае, эти аппроксимирующие функции — так наз. δ -образная последовательность — не обязательно должны быть ступенчатыми, как это было в приведенном построении

Ее физический смысл, например, таков: если по пространству распределена масса, то средняя плотность в области Ω есть $\rho_\Omega = M(\Omega)/\text{mes}\Omega$, где $M(\Omega)$ — масса в объеме Ω . Плотность в точке $\rho(x_0) = \lim \rho_\Omega$ при стягивании Ω в точку x_0 . Тогда $M(A) = \int_A \rho(x)dx$ для любого объема A . Если в пространстве имеется единственная точечная масса величиной 1, то плотность ее во всем пространстве есть δ -функция. Аналогично можно рассуждать о зарядах и т. п.

Как и в одномерном случае, характеристическим свойством δ -функции является соотношение

$$\begin{aligned} h(t_0) &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(t - t_0)h(t)dt = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(t_0 - t)h(t)dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(s)h(s + t_0)ds = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(s)h(t_0 - s)ds, \end{aligned} \tag{10}$$

верное для всех непрерывных функций h , и означающее, например, что массу (а также заряд и т. п.) распределенную в пространстве можно представить как совокупность элементарных (точечных) масс (зарядов и т. п.).

При решении линейных дифференциальных уравнений $Au = f$ полезно понятие ФР оператора A — это такая функция M , что $A_x M = \delta$. Конечно, ФР определяется с точностью до прибавления решения однородного уравнения, но обычно договариваются какое из решений выбирается. Например, ФР оператора d^2/dx^2 (одномерный Δ) являются

функции (ср. (8) и ее решение)

$$M(x) = x\theta(x) + ax + b.$$

Найдем ФР \mathcal{E}_n многомерного оператора Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \quad n \geq 2, \quad \text{т. е. решение уравнения}$$

$\Delta \mathcal{E}_n = \delta$. Ввиду симметрии (изотропии) Δ естественно искать \mathcal{E}_n в виде $\mathcal{E}_n(x) = \varphi(|x|) = \varphi(r)$. Используя представление Δ в сферической СК (или непосредственно), получаем

$$\Delta \varphi(r) = \varphi''(r) + \frac{n-1}{r} \varphi'(r). \quad \text{При } r > 0 \text{ по определению}$$

δ -функции имеем $\varphi''(r) + \frac{n-1}{r} \varphi'(r) = 0$, т. е.

$$(r^{n-1} \varphi'(r))' = 0, \quad \text{откуда}$$

$$\varphi(r) = \begin{cases} ar^{2-n} + b, & n \geq 3, \\ c \ln r + d, & n = 2. \end{cases}$$

Без потери общности можно считать $b = d = 0$ (т. к.

$\Delta b = \Delta d = 0$). Поскольку⁷

$$1 = \int_{B(0,1)} \Delta \mathcal{E}_n(x) dx = \int_{S(0,1)} \frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial \nu} dS = \int_{S(0,1)} \varphi'(1) dS = \varphi'(1) \sigma_n$$

(где σ_n — мера единичной сферы), то $a = \frac{1}{\sigma_n(2-n)}$, $c = \frac{1}{2\pi}$, так что в итоге

$$\mathcal{E}_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_n(2-n)} |x|^{2-n}, & n \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi} \ln |x|, & n = 2. \end{cases}$$

⁷При переходе от интеграла по шару к интегралу по сфере используется формула Гаусса-Остроградского.

Далее ограничимся случаями $n = 2, 3$:

$$\mathcal{E}_2(x) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|}, \quad \mathcal{E}_3(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}. \quad (11)$$

Физический смысл этих функций легко понять на примере электростатики: потенциал φ электрического поля в стационарном случае описывается уравнением (см. § 1) $\Delta\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}$, значит, $(11)_2$ есть потенциал поля, создаваемого точечным зарядом величиной $\varepsilon\varepsilon_0$, находящимся в 0, т. к. его плотность есть как раз $\rho = \varepsilon\varepsilon_0\delta$. Таким образом, заряд величиной Q , находящийся в точке x_0 , создает поле с потенциалом

$$\varphi(x) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0|x - x_0|},$$

а само поле при этом равно

$$\mathbf{E}(x) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{x - x_0}{|x - x_0|^3},$$

что согласуется с законом Кулона, т. к. на заряд величиной q , находящийся в точке x , будет действовать сила

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}(x) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{x - x_0}{|x - x_0|^3}.$$

[согласование с законом Кулона имеет место потому, что уравнения Максвелла, из которых мы вывели рассматриваемое уравнение Пуассона, собственно и получены на основе феноменологических законов, среди которых и закон Кулона]

Двумерный аналог $(11)_1$ соответствует, например, заряженным прямым нитям бесконечной длины в случае если нет зависимости параметров от третьего измерения.

Вернемся теперь к вопросу о построении решений задач для уравнения Пуассона с помощью ФГ. Рассмотрим краевые задачи Дирихле и Неймана:

$$\Delta u = f \quad \text{в } \Omega; \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi \quad \text{или} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega} = \psi. \quad (12)$$

Какова бы ни была функция v , можно записать тождество (ср. одномерный аналог выше)

$$\operatorname{div}(u\nabla v - v\nabla u) = u\Delta v - v\Delta u = u\Delta v - vf$$

и проинтегрировать по Ω , что дает⁸ равенство

$$\int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS = \int_{\Omega} u \Delta v d\Omega - \int_{\Omega} v f d\Omega. \quad (13)$$

Если $v = v(x, y)$, все производные и интегрирование в (13) понимаются по y , и $\Delta_y v(x, y) = -\delta(x - y)$, то (13) принимает вид

$$\begin{aligned} u(x) = & - \int_{\Omega} v(x, y) f(y) dy + \\ & + \int_{\partial\Omega} \left(-u(y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial \nu_y} + v(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} \right) dS_y. \end{aligned} \quad (14)$$

В зависимости от того, какая задача решается — Дирихле или Неймана, мы можем сделать следующее:

Случай 1. Задача Дирихле: $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ известно, $\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega}$ неизвестно. Тогда потребуем $v(x, y)|_{y \in \partial\Omega} = 0$, и (14) примет

⁸Снова по формуле Гаусса-Остроградского.

ВИД

$$u(x) = - \int_{\Omega} v(x, y) f(y) dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v(x, y)}{\partial \nu_y} \varphi(y) dS_y. \quad (15)$$

Случай 2. Задача Неймана: $\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = \psi$ известно, $u|_{\partial\Omega}$ неизвестно. Тогда потребуем $\frac{\partial v(x, y)}{\partial \nu_y} \Big|_{y \in \partial\Omega} = 0$, и (14) примет вид

$$u(x) = - \int_{\Omega} v(x, y) f(y) dy + \int_{\partial\Omega} v(x, y) \psi(y) dS_y. \quad (16)$$

В обоих случаях $v(x, y) = g(x, y)$ называется функцией Грина соответствующей задачи, а формулы (15), (16) позволяют вычислить решение. Смысл формул (15), (16) тот же что и у (4). Так, при $\varphi = 0$, $\psi = 0$ (аналог $\alpha = 0$) решение с любым внешним воздействием есть сумма решений с элементарными (точечными) воздействиями. Отметим, что (3) есть одномерный вариант $(12)_{1,2}$, так что и (5) есть ФГ задачи Дирихле для Δ при $n = 1$. Свойства ФГ можно переписать, обозначив $h(x, y) = g(x, y) + \mathcal{E}_n(x - y)$, так что введенные 2 свойства примут вид:

$$\Delta_y h(x, y) = 0; \quad h(x, y)|_{y \in \partial\Omega} = \mathcal{E}_n(x - y)|_{y \in \partial\Omega} \quad \text{или} \quad (17)$$

$$\frac{\partial h(x, y)}{\partial \nu_y} \Big|_{y \in \partial\Omega} = \frac{\partial \mathcal{E}_n(x - y)}{\partial \nu_y} \Big|_{y \in \partial\Omega}.$$

Оказывается, $h(x, y) = h(y, x)$ (т. е. $g(x, y) = g(y, x)$), так что свойства (17) можно записывать, поменяв ролями x и y . Итак, решения краевых задач Дирихле и Неймана можно

выписать, если известны ФГ этих задач, причем ФГ не зависят от входных данных, т. е. ищутся 1 раз. С другой стороны, их поиск в общем случае есть нетривиальная задача — следует решить задачу (17), которая (за исключением отсутствия f) такова же что и исходная задача (12), да еще и с параметром. Но для некоторых частных случаев ФГ может быть найдена явно, особенно если учесть ее ясный физический смысл. В самом деле, ФГ — это ФР (правда, с другим знаком и смещенное), удовлетворяющее однородным краевым условиям того же типа, что и в исходной задаче. Например, в задаче Дирихле (12)_{1,2} ФГ $g(x, y)$ есть решение задачи

$$\Delta_y g(x, y) = -\delta(x - y); \quad g(x, y)|_{y \in \partial\Omega} = 0, \quad (18)$$

так что, в частности, потенциал $\tilde{\varphi}$ электрического поля в теле Ω , порожденного зарядами плотностью ρ и при известном потенциале φ на поверхности, задается формулой

$$\tilde{\varphi}(x) = - \int_{\Omega} \frac{g(x, y)\rho(y)}{\varepsilon\varepsilon_0} dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial g(x, y)}{\partial \nu_y} \varphi(y) dS_y; \quad (19)$$

при этом сама ФГ g описывает потенциал поля, создаваемого точечным зарядом величиной $-\varepsilon\varepsilon_0$, находящимся в точке $x \in \Omega$, при условии что граница тела заземлена. Для некоторых форм Ω из этой идеи можно явно выписать g и тем самым решить задачу, т. е. найти искомое поле. Соответствующие примеры разбираются в следующем параграфе.

§ 9. Задачи Дирихле и Неймана для уравнений Пуассона и Лапласа в некоторых конкретных областях. Гармонические функции

В качестве первого примера рассмотрим задачу

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = f(x_1, x_2), \quad x_2 > 0; \quad u|_{x_2=0} = \varphi(x_1). \quad (1)$$

Ее решение, как показано выше, имеет вид

$$u(x_1, x_2) = - \int_{y_2 > 0} g(x, y) f(y) dy - \int_{y_2 = 0} \frac{\partial g(x, y)}{\partial \nu_y} \varphi(y_1) dy_1,$$

где g — ФГ, т. е.

$$g(x, y) = h(x, y) - \mathcal{E}_2(x - y), \quad \mathcal{E}_2(z) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|z|},$$

$$\Delta_y h(x, y) = 0; \quad h(x, y)|_{y_2=0} = \mathcal{E}_2(x - y)|_{y_2=0}. \quad (2)$$

Таким образом, если u имеет смысл потенциала электрического поля, то $-\mathcal{E}_2(x - y)$ есть потенциал поля точечного заряда (точнее, здесь и далее в плоском случае — нитевидный заряд) величиной $-\varepsilon\varepsilon_0$ и находящегося в точке x . В то же время $h(x, y)$ есть потенциал некоторого электрического поля такого, что при $y_2 > 0$ зарядов нет, а при $y_2 = 0$ потенциал такой же как для заряда величиной $\varepsilon\varepsilon_0$, находящегося в точке x . Нетрудно догадаться, что как раз такое поле создает заряд величиной $\varepsilon\varepsilon_0$, находящийся в точке $\bar{x} = (x_1, -x_2)$. Другими словами, если имеется заряд и заземленная стенка, то это эквивалентно двум противоположным зарядам

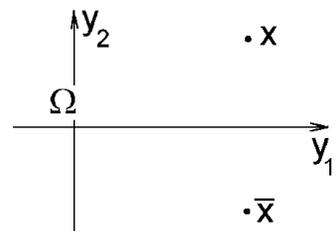


Рис. 11. Стенка

и убранной стенке (ср. аналогичное рассуждение в § 5) — см. рис. 11. Возвращаясь к математической формулировке, это можно записать так: $h(x, y) = \mathcal{E}_2(\bar{x} - y)$. Итак,

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\bar{x} - y|}.$$

Вычисляем: $\nu_y = (0, -y_2)$; $\frac{\partial}{\partial \nu_y} = -\frac{\partial}{\partial y_2}$;

$$\begin{aligned} -\frac{\partial g(x, y)}{\partial \nu_y} \Big|_{y_2=0} &= \frac{\partial g(x, y)}{\partial y_2} \Big|_{y_2=0} = \\ &= \frac{1}{2\pi} |x - y| \frac{-1}{|x - y|^2} \frac{y_2 - x_2}{|y - x|} \Big|_{y_2=0} - \\ &-\frac{1}{2\pi} |\bar{x} - y| \frac{-1}{|\bar{x} - y|^2} \frac{y_2 + x_2}{|y - \bar{x}|} \Big|_{y_2=0} = \frac{x_2}{\pi |x - y|^2}, \end{aligned}$$

и в итоге

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{y_2 > 0} \ln \frac{|x - y|}{|\bar{x} - y|} f(y) dy + \frac{x_2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(y_1) dy_1}{(x_1 - y_1)^2 + x_2^2}. \quad (3)$$

Аналогично в задаче Неймана

$$u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} = f(x_1, x_2), \quad x_2 > 0; \quad -\frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = \psi(x_1) \quad (4)$$

решение представляется в виде

$$u(x_1, x_2) = - \int_{y_2 > 0} g(x, y) f(y) dy + \int_{y_2=0} g(x, y) \psi(y_1) dy_1, \quad (5)$$

где $g(x, y) = h(x, y) - \mathcal{E}_2(x - y)$,

$$\Delta_y h(x, y) = 0; \quad -\frac{\partial h(x, y)}{\partial y_2} \Big|_{y_2=0} = -\frac{\partial \mathcal{E}_2(x - y)}{\partial y_2} \Big|_{y_2=0}.$$

Догадаться до вида h можно снова с помощью примера с зарядами — следует найти потенциал h такого поля, чтобы в верхней полуплоскости не было зарядов, но на граничной прямой нормальная компонента (нормаль направлена вниз) электрического поля была такая же как у заряда величиной $\varepsilon\varepsilon_0$, находящегося в точке x . Такое поле создается зарядом $-\varepsilon\varepsilon_0$, находящимся в точке \bar{x} , т. е. $h(x, y) = -\mathcal{E}_2(\bar{x} - y)$.

$$\text{Значит, } g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\bar{x} - y|},$$

$$g(x, y)|_{y_2=0} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|x - y|} = -\frac{1}{2\pi} \ln(|x - y|^2),$$

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{y_2>0} \ln(|x - y| \cdot |\bar{x} - y|) f(y) dy - \tag{6}$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \ln[(x_1 - y_1)^2 + x_2^2] \psi(y_1) dy_1.$$

Представления (3) и (6) были получены нами формально, а на самом деле требуют немалых дополнительных усилий при их трактовке. Так, они имеют смысл только при определенных ограничениях на скорость убывания f , φ , ψ на ∞ ; для корректности самих задач (1) и (4) следует налагать определенные требования как на входные данные, так и на решения. В этом плане менее «патологическим» (и к тому же более физичным) является трехмерный случай, но в техническом плане (при выводе аналогов формул (3), (6)) он совершенно аналогичен двумерному, так что останавливаться на нем нет смысла.

Следующий интересный пример — задача Дирихле в трехмерном шаре

$$\Delta u = f, \quad x \in B(0, R) \subset \mathbb{R}^3; \quad u|_{|x|=R} = \varphi. \quad (7)$$

Снова следует найти ФГ

$$g(x, y) = h(x, y) - \mathcal{E}_3(x - y); \quad \mathcal{E}_3(z) = -\frac{1}{4\pi|z|};$$

$$\Delta_y h(x, y) = 0, \quad y \in B(0, R); \quad h(x, y)|_{|y|=R} = \mathcal{E}_3(x - y)|_{|y|=R}.$$

Опять h можно трактовать как потенциал электрического поля такого что в шаре нет зарядов, а на сфере потенциал такой же как от заряда величиной $\varepsilon\varepsilon_0$, находящегося

в точке x . Из физических соображений можно догадаться что такой потенциал порождается зарядом, находящимся в точке $x^* = \frac{R^2}{|x|^2}x$ (точка симметричная к x относительно сферы) неизвестной пока величины (но заведомо противоположного знака), т. е. ищем h в виде

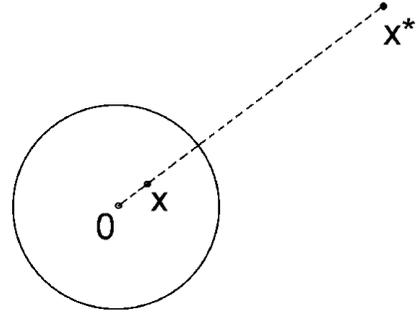


Рис. 12. Сфера-стенка

$$h(x, y) = \alpha(x)\mathcal{E}_3(x^* - y) = \frac{\beta(x)}{|x^* - y|}$$

(см. рис. 12). Поскольку $x^* \notin B[0, R]$, то $\Delta_y h(x, y) = 0$ автоматически при $|y| < R$. Остается подсчитать (при $|y| = R$)

$$\begin{aligned} |x^* - y|^2 &= |x^*|^2 + |y|^2 - 2(x^*, y) = \frac{R^4}{|x|^2} + R^2 - 2R^2 \frac{(x, y)}{|x|^2} = \\ &= R^2 \frac{R^2 + |x|^2 - 2(x, y)}{|x|^2} = \frac{R^2}{|x|^2} |x - y|^2, \end{aligned}$$

т. е.

$$|x^* - y| = \frac{R|x - y|}{|x|} \quad \text{при} \quad |y| = R, \quad (8)$$

и нужно $-\frac{1}{4\pi|x - y|} = \frac{\beta(x)|x|}{R|x - y|}$, откуда $\beta(x) = -\frac{R}{4\pi|x|}$;
в итоге

$$h(x, y) = -\frac{R}{4\pi|x||x^* - y|}, \quad g(x, y) = \frac{1}{4\pi|x - y|} - \frac{R}{4\pi|x||x^* - y|}.$$

Для краткости дальнейших вычислений ограничимся случаем $f = 0$:

$$u(x) = - \int_{S(0,R)} \frac{\partial g(x, y)}{\partial \nu_y} \varphi(y) dS_y.$$

Рассчитав необходимые величины (с учетом (8)):

$$\nabla_y g(x, y) = -\frac{1}{4\pi|x - y|^2} \frac{y - x}{|y - x|} + \frac{R}{4\pi|x||x^* - y|^2} \frac{y - x^*}{|y - x^*|},$$

$$\begin{aligned} \nabla_y g(x, y)|_{|y|=R} &= \frac{x - y}{4\pi|x - y|^3} + \frac{R(y - x^*)|x|^3}{4\pi|x|R^3|x - y|^3} = \\ &= \frac{|x|^2 - R^2}{4\pi|x - y|^3 R^2} y, \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial g(x, y)}{\partial \nu_y} \right|_{|y|=R} = \nabla_y g(x, y)|_{|y|=R} \cdot \frac{y}{R} = \frac{|x|^2 - R^2}{4\pi|x - y|^3 R},$$

окончательно получаем формулу решения задачи (7) при $f = 0$:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R} \int_{S(0,R)} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^3} \varphi(y) dS_y \quad (n = 3), \quad (9)$$

называемую формулой Пуассона. Аналогично выводится формула Пуассона в двумерном случае:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi R} \int_{S(0,R)} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^2} \varphi(y) dS_y \quad (n = 2). \quad (10)$$

Интересен еще один способ вывода формулы (10) — с помощью метода Фурье, который широко применяется и в задачах для уравнений Пуассона и Лапласа. Так, в случае круга:

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = 0, \quad u|_{x_1^2+x_2^2=R^2} = \chi \quad (11)$$

удобно перейти в полярную СК $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$, так что (11) запишется в виде

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, \quad u|_{r=R} = \chi(\varphi). \quad (12)$$

Будем искать частные решения (12)₁ в виде $u = K(r)\Phi(\varphi)$, тогда

$$\frac{r^2K'' + rK'}{K} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda = \text{const},$$

т. е.

$$r^2K'' + rK' - \lambda K = 0, \quad \Phi'' + \lambda\Phi = 0.$$

С учетом 2π -периодичности функции Φ получаем

$$\lambda = n^2, \quad n \in \mathbb{N}_0; \quad \Phi_0 = A_0 = \text{const},$$

$$\Phi_n = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

После этого находим $K_0 = C_0 \ln r + D_0$, $K_n = C_n r^n + D_n r^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$. Отбрасывая $\ln r$ и r^{-n} в силу их разрывности в центре круга, окончательно получаем частные решения вида

$$r^n \cos n\varphi, \quad r^n \sin n\varphi \quad (n \in \mathbb{N}); \quad 1,$$

произвольная комбинация которых также является решением (12)₁:

$$u = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (13)$$

Подставляя это представление в (12)₂:

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = \chi(\varphi),$$

находим

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi(\alpha) d\alpha, \quad A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \chi(\alpha) \cos n\alpha d\alpha, \quad (14)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \chi(\alpha) \sin n\alpha d\alpha, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тем самым, мы получили решение задачи (11) в виде (13), (14). Можно пользоваться этими формулами в полученном виде, но можно и преобразовать их следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi(\alpha) d\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{1}{2\pi} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \chi(\alpha) \left(2 \cos(n\alpha) \cos(n\varphi) + 2 \sin(n\alpha) \sin(n\varphi)\right) d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(r, \varphi, \alpha) \chi(\alpha) d\alpha, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned}
 h(r, \varphi, \alpha) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n 2 \cos(n(\varphi - \alpha)) = \\
 &= -1 + 2\operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} e^{i(\varphi - \alpha)}\right)^n = -1 + 2\operatorname{Re} \frac{1}{1 - \frac{r}{R} e^{i(\varphi - \alpha)}} = \\
 &= \frac{R^2 - r^2}{(R^2 + r^2) - 2rR \cos(\varphi - \alpha)}. \tag{16}
 \end{aligned}$$

Формулы (15), (16) суть переписанная двумерная формула Пуассона. В самом деле, возвращаясь обратно в декартову СК: $x = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, $y = (R \cos \alpha, R \sin \alpha)$, получим:

$$\begin{aligned}
 (R^2 + r^2) - 2rR \cos(\varphi - \alpha) &= |y|^2 + |x|^2 - 2(x, y) = |x - y|^2, \\
 dS_y &= R d\alpha,
 \end{aligned}$$

т. е.

$$u = \frac{1}{2\pi R} \int_{|y|=R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^2} \chi(y) dS_y$$

— а это и есть двумерная формула Пуассона в форме (10).

Пример. У круглой пластинки радиусом R верхняя половина окружности поддерживается в течение длительного времени при температуре 2°C , а нижняя — при 0°C , причем с плоских поверхностей пластинка теплоизолирована. Найти температуру во всей пластинке.

Решение. Поскольку процесс за длительное время установился, то температура u (в градусах Цельсия) в пластинке

описывается уравнением Лапласа, т. е.

$$\Delta u = 0, \quad r < R, \quad \varphi \in [0, 2\pi);$$

$$u|_{r=R, \varphi \in (0, \pi)} = 2, \quad u|_{r=R, \varphi \in (\pi, 2\pi)} = 0.$$

Из формулы (14) находим

$$A_0 = 1, \quad A_n = 0, \quad B_{2k} = 0, \quad B_{2k+1} = \frac{4}{\pi R^{2k+1}(2k+1)},$$

а тогда из (13)

$$u = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin(2k+1)\varphi.$$

В частности, на оси симметрии, т. е. при $\varphi = 0, \pi$, получим $u = 1$ (°C), а на другой оси:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} : \quad u = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1} = 1 + \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{r}{R},$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} : \quad u = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(2k+1)} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1} = 1 - \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{r}{R}.$$

Здесь мы использовали тот факт, что при $|x| < 1$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \quad \Longrightarrow$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}. \quad \square$$

Даже из рассмотренных немногочисленных примеров (а тем более из соображений приведенных в § 1) видно, какую большую роль при описании физических явлений играет оператор Лапласа и в частности решения уравнения

Лапласа, называемые (как говорилось в § 1) гармоническими функциями. Поэтому их свойства полезно знать. Одно из этих свойств сразу следует из формул Пуассона (9), (10): положив в них $x = 0$, получим

$$u(0) = \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_{S(0,R)} \varphi(y) dS_y,$$

т. е. значение гармонической функции в центре шара

[ясно, что шар может быть любым, сдвигом всегда можно добиться чтобы его центром был 0]

равно среднему значению на сфере (это называется «*теорема о среднем*»). В предыдущем Примере мы наблюдали это явление. Еще одно интересное свойство — *принцип максимума*, состоящий в том, что гармоническая в некоторой области функция не может принимать внутри области значения бóльшие чем максимум по границе (аналогично для минимума). Это свойство мы не будем доказывать, но дадим физическую иллюстрацию: пусть мембрана натянута на проволоку и неподвижна. Тогда ее форма описывается гармонической функцией, и мембрана не может выступать выше или ниже соответствующих выступов на проволоке. Напротив, она даже будет строго выше или ниже граничных выступов, как бы сглаживая их (если только проволока не плоская совершенно). Это свойство гармонических функций (значения в области строго меньше максимума на границе, если функция не есть постоянная) называется *усиленным принципом максимума*.

План практических занятий

План занятий по теме 1.

Напоминание линейных ОДУ до II порядка; задача Штурма-Лиувилля

1. Напомнить как решать уравнения вида $y' + a(x)y = 0$.
2. Решить уравнение $y' + xy = 0$ и задачу Коши $y(1) = 2$ для него.
3. *Домашнее задание.* Решить уравнение $y' - (\sin x)y = 0$ и задачу Коши $y(0) = 3$.
4. Напомнить как решать уравнения вида $y' + a(x)y = f(x)$ (оба способа — интегрирующий множитель и вариация постоянной).
5. Решить уравнение $y' + xy = 4x$ и задачу Коши $y(2) = 3$.
6. *Домашнее задание.* Решить уравнение $y' - (\sin x)y = \sin 2x$ и задачу Коши $y(-\pi) = 0$.
7. Напомнить как решать уравнения вида $y'' + ay' + by = 0$.
8. Решить уравнение $y'' + 3y' + 2y = 0$ и задачу Коши $y(0) = 1, y'(0) = 0$.
9. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0$ и краевую задачу $y(0) = 1, y'(2) = 4$.
10. Решить уравнение $y'' - 2y' + 5y = 0$ и краевую задачу $y(-1) = 0, y(1) = 2$.

11. *Домашнее задание.* Решить уравнение $y'' + 4y = 0$ и задачу Коши $y(2) = 1, y'(2) = 2$.

12. Напомнить как решать уравнения вида $y'' + ay' + by = f(t)$, т. е.: ищем в виде $y = C_1y_1 + C_2y_2$, где y_1, y_2 — фундаментальная система решений однородного уравнения, а для C_k имеем систему

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}.$$

13. Решить уравнение $y'' - 4y' + 3y = e^x$ и задачу Коши $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

14. *Домашнее задание.* Решить уравнение $y'' + y = x$ и краевую задачу $y(0) = 0, y(3) = 1$.

15. Пояснить смысл задачи Штурма-Лиувилля

$$y'' + ay' + by = \lambda y;$$

$$\gamma_1 y(\alpha) + \gamma_2 y'(\alpha) = 0, \quad \gamma_3 y(\beta) + \gamma_4 y'(\beta) = 0$$

— т. е. что это задача на СЗ и СФ аналогично алгебраической задаче на СЧ и СВ для $Ax = \lambda x$. Свойства з.Ш-Л узнаем на дальнейших примерах.

16. Решить з.Ш-Л $y'' = \lambda y, y(0) = y(\pi) = 0$.

17. Решить з.Ш-Л $y'' = \lambda y, y(0) = y'(l) = 0$.

18. *Домашнее задание*⁹. Решить з.Ш-Л

$$(a) \quad y'' = \lambda y, y'(0) = y'(l) = 0;$$

⁹Желательно в аудитории начать решение.

(b) $y'' + 4y' = \lambda y$, $y(a) = y(b) = 0$ ($a < b$);

(c) $y'' = \lambda y$, $y'(0) = y(1) = 0$.

План занятий по теме 2.

Задача Коши для УКС

1. УКС имеет вид $u_{tt} - c^2 u_{xx} = f$ (см. лекции). Для простоты расчетов будем считать что $c = 1$ (после замены $x := x/c$). Общее решение однородного УКС:

$u = A(x + t) + B(x - t)$. Задача Коши:

$$u|_{t=0} = \varphi, \quad u_t|_{t=0} = \psi.$$

Ее решение при $f = 0$ легко вывести из общего решения:

$$u = \frac{\varphi(x + t) + \varphi(x - t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(s) ds$$

(формула Даламбера).

2. Решить задачу Коши $u_{tt} - u_{xx} = 0$, $u|_{t=0} = x^2$,
 $u_t|_{t=0} = 4x + 1$.
3. *Домашнее задание.* Решить задачу Коши $u_{tt} - u_{xx} = 0$,
 $u|_{t=0} = e^{2x}$, $u_t|_{t=0} = \sin x$.
4. «Решить» задачу Коши $u_{tt} - u_{xx} = 0$, $u|_{t=0} = \chi_{[0,1]}$,
 $u_t|_{t=0} = 0$ (на самом деле так делать нельзя т. к. $\chi_{[0,1]}$ разрывна, но эту задачу можно понимать как предельную, и все равно применять формулу Даламбера). Нарисовать график u как функции от x при разных t .

5. Напомнить что задачу Коши для неоднородного уравнения $u_{tt} - u_{xx} = f$, $u|_{t=0} = \varphi$, $u_t|_{t=0} = \psi$ надо решать так:
 $u = v + w$,

$$v_{tt} - v_{xx} = 0, \quad v|_{t=0} = \varphi, \quad v_t|_{t=0} = \psi,$$

$$w_{tt} - w_{xx} = f, \quad w|_{t=0} = 0, \quad w_t|_{t=0} = 0,$$

где v снова по формуле Даламбера, а w — по методу Дюамеля:

$$w(t, x) = \int_0^t h(t, x; \tau) d\tau, \quad \text{где}$$

$$h_{tt} - h_{xx} = 0, \quad h|_{t=\tau} = 0, \quad h_t|_{t=\tau} = f(\tau, x),$$

что после замены $t - \tau = s$ принимает вид $h_{ss} - h_{xx} = 0$, $h|_{s=0} = 0$, $h_s|_{s=0} = f(\tau, x)$, и можно найти h по формуле Даламбера.

6. Решить задачу Коши $u_{tt} - u_{xx} = 3x^2 + 2t$, $u|_{t=0} = \cos x$, $u_t|_{t=0} = 3$.
7. *Домашнее задание.* Решить задачу Коши $u_{tt} - u_{xx} = t \sin x$, $u|_{t=0} = 2$, $u_t|_{t=0} = 4x^3$.

План занятий по теме 3.

Краевые задачи для УКС

1. I НКЗ для однородного УКС

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad x > 0,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad u|_{x=0} = \mu(t)$$

можно решить, подставив общее решение УКС

$u = A(x + t) + B(x - t)$ в начально-краевые условия.

2. Решить задачу $u_{tt} - u_{xx} = 0$, $u|_{t=0} = 3x$, $u_t|_{t=0} = 1$,
 $u|_{x=0} = t^2$.

3. *Домашнее задание.* Решить задачу $u_{tt} - u_{xx} = 0$,
 $u|_{t=0} = 2x^2$, $u_t|_{t=0} = 2$, $u|_{x=0} = t$.

4. Аналогично решается II НКЗ

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad x > 0,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad u_x|_{x=0} = \nu(t),$$

при этом нужно использовать непрерывность u при $x = t$.

5. Решить задачу $u_{tt} - u_{xx} = 0$, $u|_{t=0} = 1$, $u_t|_{t=0} = 4x$,
 $u_x|_{x=0} = 3t^2$.

6. *Домашнее задание.* Решить задачу $u_{tt} - u_{xx} = 0$,
 $u|_{t=0} = 8x^3$, $u_t|_{t=0} = 0$, $u_x|_{x=0} = 2t$.

7. НКЗ для неоднородного УКС

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t > 0, x > 0), \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x),$$

$$[u|_{x=0} = \mu(t) \text{ или } u_x|_{x=0} = \nu(t)]$$

решаются разбиением $u = v + w$, где

$$v_{tt} - v_{xx} = 0 \quad (t > 0, x > 0), \quad v|_{t=0} = \varphi(x), \quad v_t|_{t=0} = \psi(x),$$

$$[v|_{x=0} = \mu(t) \text{ или } v_x|_{x=0} = \nu(t)],$$

$$w_{tt} - w_{xx} = f \quad (t > 0, x > 0), \quad w|_{t=0} = 0, \quad w_t|_{t=0} = 0, \\ [w|_{x=0} = 0 \text{ или } w_x|_{x=0} = 0];$$

при этом v находится как выше, а w — с помощью принципа Дюамеля, т. е. $w(t, x) = \int_0^t h(t, x; \tau) d\tau$, где

$$h_{tt} - h_{xx} = 0 \quad (t > 0, x > 0), \quad h|_{t=\tau} = 0, \quad h_t|_{t=\tau} = f(\tau, x), \\ [h|_{x=0} = 0 \text{ или } h_x|_{x=0} = 0],$$

и с помощью замены $t - \tau = s$ сводим задачу к стандартной, которую решаем как выше.

8. Решить задачу $u_{tt} - u_{xx} = 4x + 6t^2$, $u|_{t=0} = 2 \sin x$,
 $u_t|_{t=0} = -2$, $u|_{x=0} = \sin 2t$.

9. *Домашнее задание.* Решить задачу $u_{tt} - u_{xx} = 4xt$,
 $u|_{t=0} = 2 + 4x$, $u_t|_{t=0} = 6x^2$, $u_x|_{x=0} = 4t^3$.

10. НКЗ для конечной струны

$$u_{tt} - u_{xx} = f, \quad u|_{t=0} = \varphi, \quad u_t|_{t=0} = \psi, \\ [u|_{x=\alpha} = \mu_1(t) \quad \text{или} \quad u_x|_{x=\alpha} = \nu_1(t)], \\ [u|_{x=\beta} = \mu_2(t) \quad \text{или} \quad u_x|_{x=\beta} = \nu_2(t)]$$

решаются с помощью метода Фурье: сначала при $f = 0$, $\mu_k = \nu_k = 0$ ищутся специальные решения вида $u = a(t)b(x)$, а затем с их помощью решается вся задача. Подробности см. в лекциях, а конкретные приемы отработаем сразу на следующих задачах.

11. Решить I НКЗ

$$\begin{aligned}u_{tt} - u_{xx} &= 0, & u|_{t=0} &= x(\pi - x), \\u_t|_{t=0} &= 0, & u|_{x=0,\pi} &= 0.\end{aligned}$$

12. Решить I НКЗ

$$\begin{aligned}u_{tt} - u_{xx} &= 2xt, & u|_{t=0} &= x(\pi - x), \\u_t|_{t=0} &= 0, & u|_{x=0,\pi} &= 0.\end{aligned}$$

13. Решить I НКЗ

$$\begin{aligned}u_{tt} - u_{xx} &= 2xt, & u|_{t=0} &= x(\pi - x), & u_t|_{t=0} &= 0, \\u|_{x=0} &= \pi^2, & u|_{x=\pi} &= \pi t^3.\end{aligned}$$

14. *Домашнее задание.* Решить I НКЗ

$$\begin{aligned}u_{tt} - u_{xx} &= x + t, & u|_{t=0} &= 1, & u_t|_{t=0} &= x, \\u|_{x=0} &= \pi t^2, & u|_{x=\pi} &= 1 + t.\end{aligned}$$

15. Решить смешанную НКЗ

$$\begin{aligned}u_{tt} - u_{xx} &= x - t, & u|_{t=0} &= x, & u_t|_{t=0} &= 1, \\u|_{x=0} &= t, & u_x|_{x=l} &= t^2.\end{aligned}$$

16. *Домашнее задание.* Решить II НКЗ

$$\begin{aligned}u_{tt} - u_{xx} &= -\frac{t^2}{l}, & u|_{t=0} &= x^2, & u_t|_{t=0} &= x, \\u_x|_{x=0} &= t, & u_x|_{x=l} &= t^2.\end{aligned}$$

Одномерное уравнение теплопроводности

1. Одномерное уравнение теплопроводности имеет вид $u_t = a^2 u_{xx} + f$ (см. лекции). Для него ставится задача Коши-Дирихле $u|_{t=0} = \varphi$, решение которой при $f = 0$ дается формулой Пуассона

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) \varphi(y) dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} \varphi(x + 2a\sqrt{t}z) dz. \end{aligned}$$

При решении конкретных задач может быть полезна функция Гаусса $E(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-s^2} ds$, о которой можно сказать что $E(-\infty) = 0$, $E(0) = 1/2$, $E(+\infty) = 1$, $E \nearrow$.

2. Решить з.К-Д

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u|_{t=0} = \begin{cases} T_1, & x < 0, \\ T_2, & x > 0. \end{cases}$$

3. Домашнее задание. Решить з.К-Д $u_t = a^2 u_{xx}$, $u|_{t=0} = T_0 \chi_{[\alpha, \beta]}$ (записать ответ с помощью функции E).
4. Для некоторых φ удобнее находить решение не по формуле Пуассона, а используя представление

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} t^k b_k(x).$$

5. Вывести рекуррентную формулу для b_k и выписать (формально) решение з.К-Д в виде степенного ряда по t .
6. Решить з.К-Д $u_t = a^2 u_{xx}$, $u|_{t=0} = x^4 - 3x^2 + x + 1$.
7. *Домашнее задание.* Решить з.К-Д $u_t = a^2 u_{xx}$,
 $u|_{t=0} = \sin x$.
8. Напомнить что многие задачи для одномерного уравнения теплопроводности решаются с помощью автомодельных решений $u(t, x) = h\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$, при этом
 $h(z) = C_1 + C_2 E\left(\frac{z}{2a}\right)$.
9. Решить I НКЗ $u_t = a^2 u_{xx}$ ($x > 0$), $u|_{t=0} = 0$, $u|_{x=0} = T$ с помощью автомодельных решений.
10. *Домашнее задание*¹⁰. Решить задачу о 2 полубесконечных стержнях равномерно нагретых (но с разной температурой и разными характеристиками) и мгновенно приведенных в соприкосновение:

$$u_t = a_1^2 u_{xx}, \quad x < 0, \quad v_t = a_2^2 v_{xx}, \quad x > 0;$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad v|_{t=0} = T;$$

$$\text{при } x = 0 : \quad u = v, \quad k_1 u_x = k_2 v_x.$$

11. Напомнить принцип Дюамеля для уравнения теплопроводности: решение задачи

¹⁰Желательно в аудитории начать решение.

$$u_t = a^2 u_{xx} + f, \quad u|_{t=0} = 0;$$

плюс, возможно, некие однородные кр. условия по x

можно построить по формуле $u(t, x) = \int_0^t h(t, x; \tau) d\tau$, где

h — решение задачи

$$h_t = a^2 h_{xx}, \quad h|_{t=\tau} = f(\tau, x);$$

те же условия по x (если есть).

12. Решить смешанную НКЗ

$$u_t = u_{xx} + 2x + 3, \quad u|_{t=0} = x,$$

$$u|_{x=0} = 3t, \quad u_x|_{x=l} = 2t^2.$$

13. *Домашнее задание.* К чему стремится при $t \rightarrow +\infty$ решение задачи

$$u_t = u_{xx}, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u|_{x=0} = T_1, \quad u|_{x=l} = T_2,$$

$T_k = \text{const}$. Дать физическое объяснение.

План занятий по теме 5.

Двумерное уравнение Лапласа в ограниченных областях

1. Для двумерного уравнения Лапласа $u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = 0$ решение задачи Дирихле в полуплоскости $\{x_2 > 0\}$: $u|_{x_2=0} = \varphi(x_1)$ дается формулой (см. лекции):

$$u(x_1, x_2) = \frac{x_2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y_1) dy_1}{(x_1 - y_1)^2 + x_2^2}.$$

2. Найти решение задачи Дирихле

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = 0, \quad x_2 > 0; \quad u|_{x_2=0} = T\chi_{[\alpha,\beta]}.$$

3. *Домашнее задание.* Та же задача с $[\alpha, \beta] := [0, +\infty)$.

4. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге

$$\Delta u = 0, \quad |x| < R, \quad u|_{|x|=R} = \chi$$

строится методом Фурье (см. лекции — есть еще формула Пуассона, но она эквивалентна методу Фурье):

$$u(r, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

где A_k, B_k легко находятся из краевых условий. Таким же образом решается задача Неймана

$$\Delta u = 0, \quad |x| < R, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{|x|=R} \equiv u_r|_{r=R} = \mu.$$

5. Решить задачу Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad |x| < R, \quad u|_{|x|=R} = 2x_1^2 + 3x_2.$$

6. Решить задачу Неймана

$$\Delta u = 0, \quad |x| < R, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{|x|=R} = \begin{cases} \alpha, & x_2 > 0, \\ \beta, & x_2 < 0. \end{cases}$$

При каких α, β это возможно сделать?

7. *Домашнее задание.* Решить задачу Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad |x| < R, \quad u|_{|x|=R} = \chi_{[0,\varphi_0]}.$$

8. Задачи для уравнения Лапласа в прямоугольнике решаются также методом Фурье, при этом з.Ш-Л пишется для той из функций, для которой имеются однородные краевые условия.

9. Решить смешанную задачу

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\alpha} = 0, \\ u_y|_{y=0} = x^2 - 2\alpha x, \quad u|_{y=\beta} = \sin \frac{\pi x}{2\alpha}.$$

10. Если все условия неоднородные, то можно разбить задачу на две и решать прежним методом.

11. *Домашнее задание*¹¹. Решить смешанную задачу

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u|_{x=0} = 2, \quad u|_{x=\pi} = \cos \frac{2\pi y}{l}, \\ u_y|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=l} = x(\pi - x).$$

12. *Домашнее задание*. Мембрана натянута на каркас:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u|_{y=0,\pi} = 0, \\ u|_{x=0,\pi} = \begin{cases} y, & y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \\ \pi - y, & y \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right). \end{cases}$$

Найти форму средних линий $\left\{x = \frac{\pi}{2}\right\}$, $\left\{y = \frac{\pi}{2}\right\}$ и относительную высоту мембраны в центре, т. е. $u\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) / (\pi/2)$. Убедиться, что теорема о среднем для гармонических функций в квадрате неверна.

¹¹ Желательно в аудитории начать решение.

План занятий по теме 1.5¹².

**Линейные однородные УЧП I порядка
(общее решение, з. Коши);**

**линейные УЧП II порядка на плоскости
(с постоянными коэффициентами в главной части):
классификация, канонический вид, общее решение.**

1. Чтобы решить линейное однородное УЧП I порядка

$$a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + a_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \quad (1)$$

надо составить характеристическую систему ОДУ

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1(x), \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = a_n(x),$$

найти $(n - 1)$ ее функционально независимых первых интегралов $\Phi_1(x), \dots, \Phi_{n-1}(x)$, и тогда общее решение (1) примет вид $u(x) = F(\Phi_1(x), \dots, \Phi_{n-1}(x))$, где F — произвольная гладкая функция.

2. Решить уравнение $x\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ и задачу Коши для него с данными $u|_{x=ey} = y^2$.

3. Решить уравнение $y^2\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} + 2y^2z^3\frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

4. *Домашнее задание.* Решить уравнение

$$(\sin y)\frac{\partial u}{\partial x} + 2x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

¹²Эта тема появляется если читается не курс ММФ для физиков, а курс УМФ (МФ) для математиков. Тогда она, как ясно из номера, проводится между темами 1 и 2, и возможно последние темы обрубаются (сокращаются).

и задачу Коши для него с данными $u|_{y=\pi/2} = x^4$.

5. Рассказать о приведении к КВ в гиперболическом случае.
6. Привести к КВ уравнение $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} + xu_y = 9y^2$.
7. *Домашнее задание.* Решить уравнение $u_{xx} - 4u_{yy} = x + y$ и задачу Коши для него с данными $u|_{x=0} = y^2$,
 $u_x|_{x=0} = 0$.
Указание. Найти КВ, общее решение в новой СК, затем общее решение в исходной СК, и наконец подставить в данные Коши, после чего привести все подобные члены.
8. Рассказать о приведении к КВ в эллиптическом и параболическом случаях.
9. Привести к КВ уравнение $u_{xx} + 4u_{xy} + 13u_{yy} - 2yu_x = 0$.
10. *Домашнее задание*¹³. Привести к КВ уравнение $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} + 8u_x = 0$.

¹³Желательно в аудитории начать решение.

Список рекомендуемой литературы

Основная

Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М.: Физматлит, 2006. — 572 с.

Олейник, О. А. Лекции об уравнениях с частными производными / О. А. Олейник. — М.: Бином, 2013. — 264 с.

Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М.: МГУ Наука, 2013. — 798 с.

Дополнительная

Белов, В. В. Сборник задач по дополнительным главам математической физики / В. В. Белов, Е. М. Воробьев. — М.: Высшая школа, 1978. — 271 с.

Берс, Л. Уравнения с частными производными / Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер. — М.: Мир, 1966. — 352 с.

Бицадзе, А. В. Сборник задач по уравнениям математической физики / А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко. — М.: Наука, 1985. — 310 с.

Будак, Б. М. Сборник задач по математической физике / Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов. — М.: Физматлит, 2003. — 688 с.

Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. — М.: Наука, 1988. — 512 с.

Владимиров, В. С. Сборник задач по уравнениям математической физики / В. С. Владимиров, А. А. Вашарин, Х. Х. Каримова [и др.]. — М.: Физматлит, 2003. — 288 с.

Годунов, С. К. Уравнения математической физики / С. К. Годунов. — М.: Наука, 1979. — 392 с.

Годунов, С. К. Сборник задач по уравнениям математической физики / С. К. Годунов, Е. В. Золотарева. — Новосибирск: Изд. НГУ, 1987. — 78 с.

Демиденко, Г. В. Введение в теорию соболевских пространств / Г. В. Демиденко. — Новосибирск: Изд. НГУ, 1995. — 112 с.

Кошляков, Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. — М.: Высшая школа, 1970. — 712 с.

Курант, Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. — М.: Мир, 1964. — 843 с.

Ладыженская, О. А. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. — М.: Наука, 1973. — 408 с.

Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. — М.: Мир, 1972. — 588 с.

Мамонтов, А. Е. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учеб. пособие / А. Е. Мамонтов. — Новосибирск: Изд. НГПУ, 2010. — Ч. 1: Элементы общей теории. — 97 с.

Мамонтов, А. Е. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учеб. пособие / А. Е. Мамонтов. — Новосибирск: Изд. НГПУ, 2011. — Ч. 2: Линейные уравнения. — 189 с.

Мамонтов, А. Е. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учеб. пособие / А. Е. Мамонтов. — Новосибирск: Изд. НГПУ, 2012. — Ч. 3: Дополнительные вопросы общей теории. — 117 с.

Мамонтов, А. Е. Лекции по уравнениям математической физики: учеб. пособие / А. Е. Мамонтов. — Новосибирск: Изд. НГПУ, 2013. — Ч. 1: Элементы общей теории уравнений в частных производных. — 129 с.

Мамонтов, А. Е. Лекции по уравнениям математической физики: учеб. пособие / А. Е. Мамонтов. — Новосибирск: Изд. НГПУ, 2014. — Ч. 2: Классические решения. — 132 с.

Мамонтов, А. Е. Лекции по уравнениям математической физики: учеб. пособие / А. Е. Мамонтов. — Новосибирск: Изд. НГПУ, 2015. — Ч. 3: Обобщенные решения. — 140 с.

Мамонтов, А. Е. Сборник задач по уравнениям математической физики / А. Е. Мамонтов, Е. В. Мамонтов. — Новосибирск: Изд. НГУ, 2006. — 88 с.

Мамонтов, Е. В. О корректности задач математической физики / Е. В. Мамонтов. — Новосибирск: Изд. НГУ, 1980. — 64 с.

Мизохата, С. Теория уравнений с частными производными / С. Мизохата. — М.: Мир, 1977. — 504 с.

Михайлов, В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. — М.: Наука, 1983. — 424 с.

Михлин, С. Г. Курс математической физики / С. Г. Михлин. — СПб: Лань, 2002. — 576 с.

Михлин, С. Г. Линейные уравнения в частных производных / С. Г. Михлин. — М.: Высшая школа, 1977. — 432 с.

Петровский, И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И. Г. Петровский. — М.: Физматлит, 1961. — 401 с.

Смирнов, М. М. Задачи по уравнениям математической физики / М. М. Смирнов. — М.: Наука, 1975. — 128 с.

Соболев, С. Л. Уравнения математической физики / С. Л. Соболев. — М.: Наука, 1966. — 444 с.

Фаддеев, Д. К. Избранные главы анализа и высшей алгебры / Д. К. Фаддеев, Б. З. Вулих, Н. Н. Уральцева и др. — Л.: ЛГУ, 1981. — 200 с.

Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. — М.; Ижевск: РХД, 2000. — 176 с.

Шамаев, А. С. Сборник задач по уравнениям с частными производными / А. С. Шамаев, Т. Д. Вентцель, А. Ю. Горицкий и др. — М.: Бином, 2005. — 158 с.

Эванс, Л. К. Уравнения с частными производными / Л. К. Эванс. — Новосибирск: Тамара Рожковская (Университетская серия; Т. 7), 2003. — 576 с.

Список аббревиатур и обозначений

з.К-Д	—	задача Коши-Дирихле
з.Ш-Л	—	задача Штурма-Лиувилля
КВ	—	канонический вид
НКЗ	—	начально-краевая задача
ОДУ	—	обыкновенное дифференциальное уравнение
СВ	—	собственный вектор
СЗ	—	собственное значение
СК	—	система координат
СФ	—	собственная функция
СЧ	—	собственное число
УКС	—	уравнение колебаний струны
УЧП	—	уравнение в частных производных
ФГ	—	функция Грина
ФР	—	фундаментальное решение
$[\cdot]$	—	размерность физической величины
σ_n	$= \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$	— мера единичной сферы в \mathbb{R}^n
χ_A	—	характеристическая функция множества A
$B(x, R)$	—	открытый шар с центром в точке x и радиусом R
$B[x, R]$	—	замкнутый шар с центром в точке x и радиусом R

$C^k(A)$	— множество функций, заданных в области A и непрерывных в ней вместе со всеми своими производными до порядка k включительно
\dim	— размерность (вектора или матрицы)
\mathcal{E}_n	— фундаментальное решение оператора Лапласа в \mathbb{R}^n
mes	— лебегова мера
\mathbb{R}^+	$= [0, +\infty)$
sgn	— знак числа

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
§ 1. Вывод некоторых дифференциальных уравнений математической физики	7
§ 2. Корректность задач математической физики	12
§ 3. Краевые задачи для дифференциальных уравнений	21
§ 4. Задача Коши для уравнения колебаний струны	31
§ 5. Смешанные задачи для уравнения колебаний струны. Метод Фурье	40
§ 6. Задача Коши-Дирихле для одномерного уравнения теплопроводности. Преобразование Фурье	60
§ 7. Одномерное уравнение теплопроводности: авто- модельные решения, некоторые краевые задачи	72
§ 8. Импульсная функция Дирака (δ -функция). Функция Грина	85
§ 9. Задачи Дирихле и Неймана для уравнений Пуассона и Лапласа в некоторых конкретных областях. Гармонические функции	98
План практических занятий	108
Список рекомендуемой литературы	122
Список аббревиатур и обозначений	127

Учебное издание

Мамонтов Александр Евгеньевич

**МЕТОДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

Учебное пособие

В авторской редакции

Компьютерная верстка — *А. Е. Мамонтов*

Подписано в печать 27.04.2016. Формат бумаги 60 × 84/16.

Печать цифровая. Уч.-изд. л. 4,49. Усл. печ. л. 7,56.

Тираж 100 экз. Заказ № 15.

ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный
педагогический университет»,

Новосибирск, ул. Виллюйская, 28

Тел.: 8(383)244-06-62, www.rio.nspru.ru

Отпечатано:

ФГБОУ ВО «НГПУ»