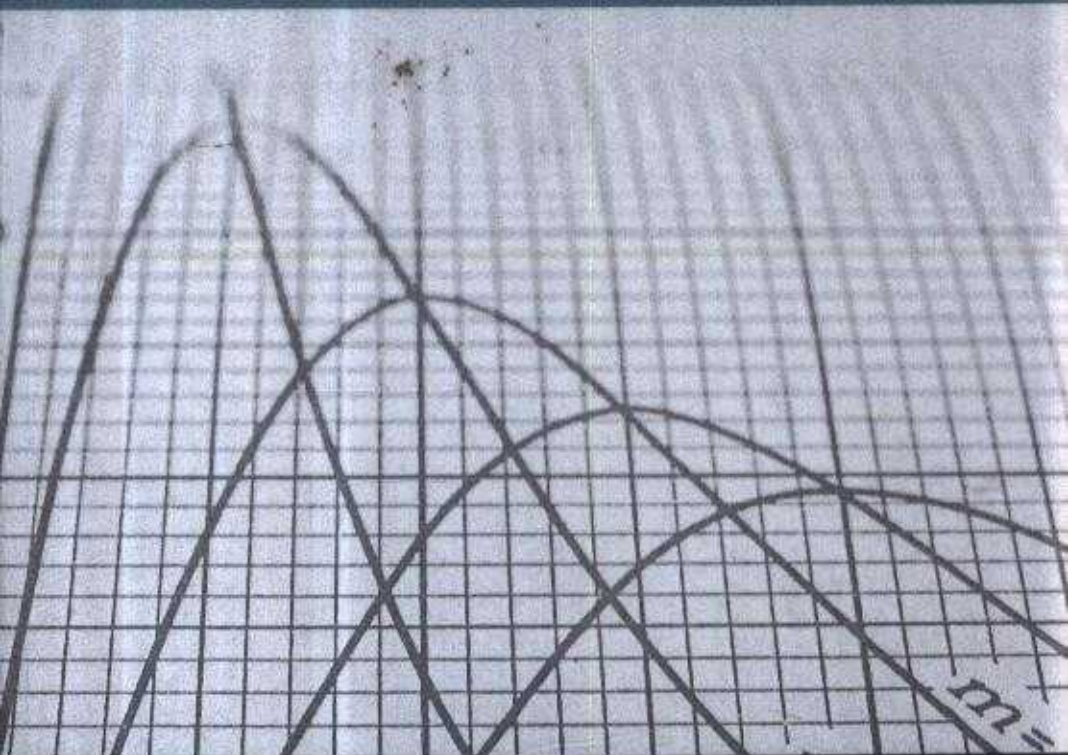


К 78

Налимбетов Б.Т., Байгулова Н.З.,

Дулатов С.Р., Урматова А.Н.



КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Методическое пособие по курсу «Математика II».

Калимбетов Б.Т., Байгулова Н.З.,
Дулатов С.Р., Урматова А.Н.

КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Методическое пособие по курсу «Математика II».



Алматы, 2021

УДК 51
ББК 22.1
К 478

Рекомендовано к изданию Методическим советам ЮКГУ им. М. Ауезова,
протокол №8, от 08.07.2010 г.

Рецензенты:

Профессор кафедры «Высшая математика» МКТУ имени Х.А. Ясауи, доктор
физико-математических наук – **Р. Ибрагимов**
Старший преподаватель кафедры «Высшая математика» ЮКГУ имени
М.Ауезова – **К.С. Нурсейтов**

Калимбетов Б.Т.

К 17 Кривые и поверхности второго порядка и их приложения. Методическое
пособие по курсу «Математика II» / Калимбетов Б.Т., Байгулова Н.З.,
Дулатов С.Р., Урматова А.Н. – Алматы: CyberSmith, 2021. – 64 с.

ISBN 978-601-342-737-9

Настоящее руководство посвящено кривым и поверхностям второго порядка, приведения общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду, использования канонического вида уравнений поверхностей второго порядка, нахождения линий уровня и поверхностей скалярных полей, вычисление потоков векторных полей и циркуляции векторного поля вдоль контура с иллюстрирующими примерами.

Пособие предназначено, прежде всего, для будущих бакалавров - электроэнергетиков и телекоммуникации. Оно может быть использовано и преподавателями, читающими лекции и ведущими практические занятия на всех технических специальностях ЮКГУ им. М. Ауезова.

Рассмотрено и предложено к печати на заседании кафедры «Высшая математика» (протокол №5, 04.12.2009) и на заседании методической комиссии факультета «Строительство, машиностроение и транспорт» (протокол №7, 24.04.2010).

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-601-342-737-9



© Калимбетов Б.Т., Байгулова Н.З.,
Дулатов С.Р., Урматова А.Н., 2021
© CyberSmith, 2021

УДК 51
ББК 22.1

1. ПРИМЕРЫ ПРИВЕДЕНИЯ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Общим уравнением линии второго порядка в декартовой системе координат называется уравнение вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0,$$

где a_{ji}, b_k, c – постоянные, при чем a_{ji} не обращаются в нуль все одновременно.

Переходом к новой декартовой системе координат, (к новому базису), данное уравнение может быть приведено к одному из следующих девяти видов, называемых каноническими:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$

Это уравнение эллипса (рис. 1), где a – большая полуось эллипса, b – малая полуось. Точки F_1, F_2 – фокусы эллипса. Длина отрезка $F_1F_2 = 2c$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

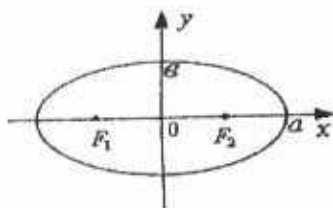


Рис. 1

В частном случае, когда $a = b$, уравнение (1) принимает вид

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Это уравнение окружности радиуса a с центром в начале координат.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad (2)$$

Это уравнение не определяет никакого геометрического места точек на плоскости и называется «мнимым эллипсом».

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3)$$

Это уравнение гиперболы (рис. 2); a, b – полуоси гиперболы.

Точки F_1, F_2 – фокусы гиперболы. Длина отрезка $F_1F_2 = 2c$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Уравнение $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ представляет гиперболу, сопряженную по отношению к предыдущей. На рис. 2 она изображена пунктирной линией.

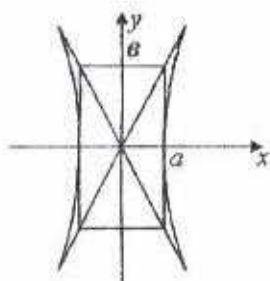


Рис. 2

$$y^2 = 2px. \quad (4)$$

Это уравнение параболы. При $p > 0$ она изображена на рис. 3. При $p < 0$ она изображена на рис.

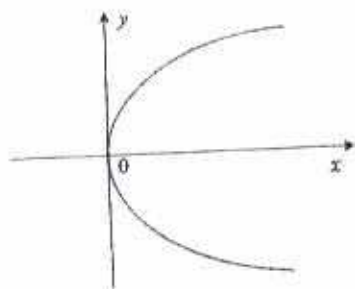


Рис. 3

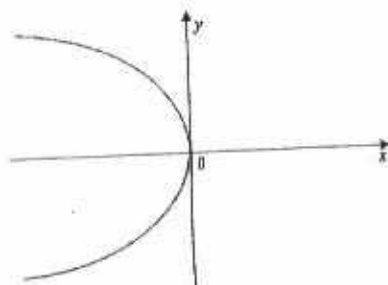


Рис. 4

Точка $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ называется фокусом параболы.

$$x^2 = 2py. \quad (5)$$

Это также уравнение параболы. При $p > 0$ она изображена на рис. 5, а при $p < 0$ – на рис. 6.

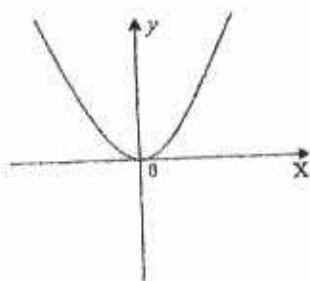


Рис. 5

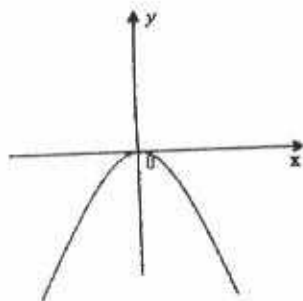


Рис. 6

Точка $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ – фокус параболы.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0. \quad (6)$$

Это уравнение определяет две пересекающиеся прямые $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$ (см. рис. 7).

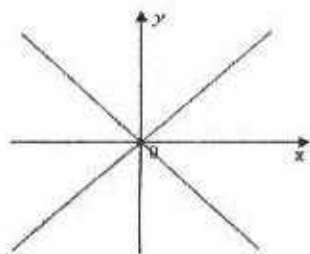


Рис. 7

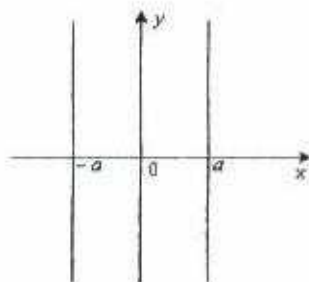


Рис. 8

$$x^2 - a^2 = 0. \quad (7)$$

Это уравнение определяет две параллельные прямые $x = a, x = -a$ (см. рис. 8).

$$x^2 + a^2 = 0. \quad (8)$$

Это уравнение не определяет никакого геометрического места точек на плоскости и называется «парой мнимых параллельных прямых».

$$x^2 = 0. \quad (9)$$

Это уравнение определяет пару совпадающих прямых:
 $x=0, x=0$, т.е. ось OY .

Этими девятью уравнениями исчерпываются все виды кривых второго порядка. Переменные x и y в уравнениях (1) – (9) могут меняться местами, что будет приводить к изменению положения кривой относительно осей координат, как, например, в случаях с параболой (4), (5).

Подробные сведения о кривых второго порядка можно найти в [1], [2].

Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду в случае отсутствия члена, содержащего произведение xy (т.е. когда $a_{12}=0$), не представляет большой сложности.

Это достигается простыми алгебраическими преобразованиями: выделением полных квадратов, переносом членов в другую сторону равенства и делением на числовые коэффициенты. В результате этого уравнение приводится к одному из видов (1) – (9).

Рассмотрим примеры.

Пусть требуется определить типы следующих кривых и нарисовать их:

а) $2y^2 - 7x + 16y + 25 = 0$;

б) $25x^2 + 36y^2 + 300x - 144y + 144 = 0$;

в) $x^2 - 4y^2 + 10x - 24y - 15 = 0$.

а) Выделим полный квадрат и перенесем свободный член и $-7x$ вправо. Получим $2(y+4)^2 = 7(x+1)$. Замена $x_1 = x+1$, $y_1 = y+4$ приводит данное уравнение к виду $y_1^2 = \frac{7}{2}x_1$. Это уравнение параболы типа (4), $p = \frac{7}{4} > 0$. График ее изображен на рис. 9.

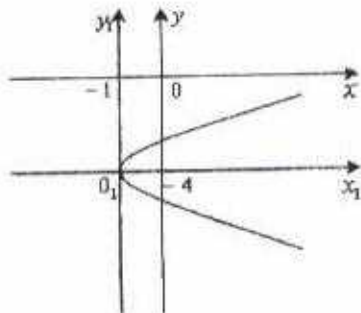


Рис. 9

б) В этом примере надо выделить два полных квадрата.
Получим

$$25(x+6)^2 + 36(y-2)^2 = 900.$$

Поделив уравнение на 900, приведем его к виду

$$\frac{(x+6)^2}{36} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1.$$

С помощью замены переменных $x_1 = x+6$, $y_1 = y-2$ получаем

$$\frac{x_1^2}{36} + \frac{y_1^2}{25} = 1.$$

Это уравнение эллипса типа (1). Его график изображен на рис.

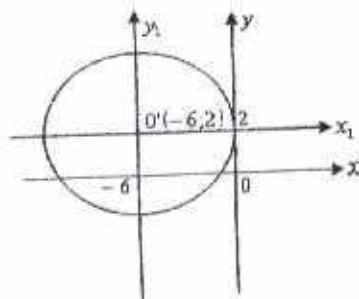


Рис. 10

в) Выделим два полных квадрата, получим $(x+5)^2 - 4(y+3)^2 = 4$.

Тогда

$$\frac{(x+5)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{1} = 1.$$

Сделаем замену переменных $x_1 = x+5$, $y_1 = y+3$. Получим

$$\frac{x_1^2}{4} - \frac{y_1^2}{1} = 1.$$

Это уравнение гиперболы типа (3). При этом $a=2$, $b=1$. Ее график изображен на рис. 11.

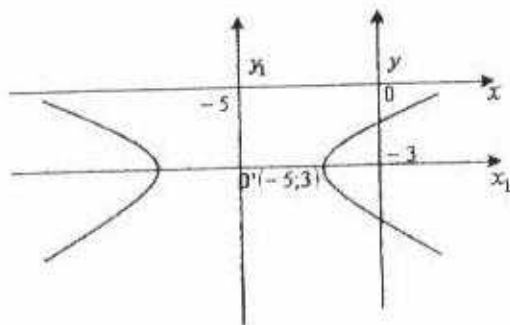


Рис. 11

В этом случае, когда общее уравнение линии второго порядка содержит слагаемое с произведением xy (т.е. $a_{12} \neq 0$), приходится еще осуществлять поворот новых осей координат $O'x_1, O'y_1$ на некоторый угол α .

Этот процесс описан в книгах [1], [2].

2. ПРИМЕРЫ НА НАХОЖДЕНИЕ ЛИНИЙ УРОВНЯ ПЛОСКИХ СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ

Плоское скалярное поле задается с помощью функции двух переменных $u = u(x, y)$. Линии уровня плоского скалярного поля определяются уравнением $u(x, y) = c$, где c — некоторая постоянная. Задавая различные значения c , получаем семейство линий уровня. Если скалярное поле u есть потенциал системы электрических зарядов, то линия уровня $u(x, y) = c$ есть эквипотенциальная линия. Если скалярное поле u есть температура, то линия уровня $u(x, y) = c$ есть линия уровня постоянной температуры.

Рассмотрим примеры.

Пусть требуется нарисовать линии уровня следующих плоских скалярных полей:

а) $u = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$;

б) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

в) $u = xy$.

а) Линии уровня определяются уравнением

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = c.$$

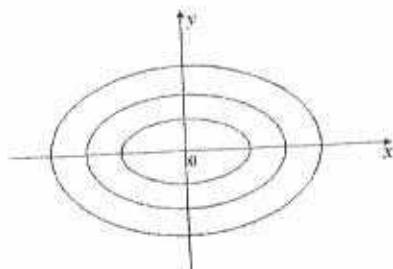


Рис. 12

Ясно, что постоянная c должна быть неотрицательной, т.е. $c \geq 0$. При $c = 0$ линия уровня вырождается в точку $(0, 0)$. При $c > 0$ получаем семейство эллипсов типа (1) $\frac{x^2}{4c} + \frac{y^2}{9c} = 1$,

с полуосями $a = 2\sqrt{c}$, $b = 3\sqrt{c}$. Они изображены на рис. 12. Чем больше значение постоянной c , тем больше полуоси эллипса.

б) Линии уровня определяются уравнением

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = c.$$

Следовательно, постоянная $c > 0$, ($c \neq 0$). Это уравнение приводится к виду $x^2 + y^2 = \frac{1}{c^2}$, т.е. задает семейство концентрических окружностей радиуса $\frac{1}{c}$ (см. рис. 13). Чем больше значение постоянной c , тем меньше радиус окружности.

в) Линии уровня определяются уравнением $xy = c$.

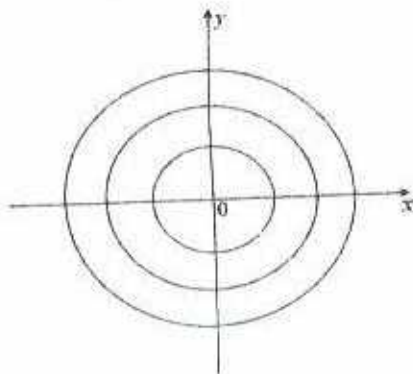


Рис. 13

Здесь постоянная c может иметь любой знак и может обращаться в нуль. При $c = 0$ получаем прямые $x = 0$ и $y = 0$, т.е.

оси координат. При $c > 0$ – это семейство гипербол в первой и третьей четверти, а при $c < 0$ – это семейство гипербол во второй и четвертой четверти (рис. 14).

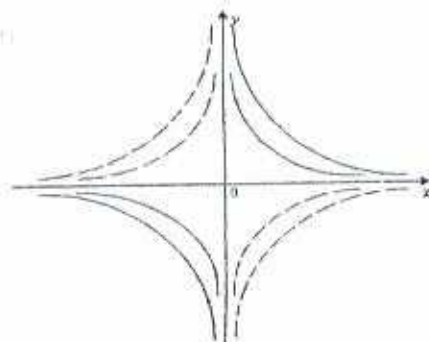


Рис. 14

3. ПРИМЕРЫ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ РАБОТЫ ПЛОСКОГО СИЛОВОГО ПОЛЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ КРИВЫХ

Часто в задачах теории поля кривые на плоскости задаются в параметрической форме

$$L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [t_1, t_2]$$

Приведем наиболее часто встречающиеся кривые на плоскости, заданные параметрическими уравнениями.

Окружность. $x^2 + y^2 = R^2$ (см. рис. 15). Координаты произвольной точки M , лежащей на окружности, выражаются так: $x = R \cos t, y = R \sin t$ и, следовательно, параметрические уравнения окружности имеют вид

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Эллипс. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 16).

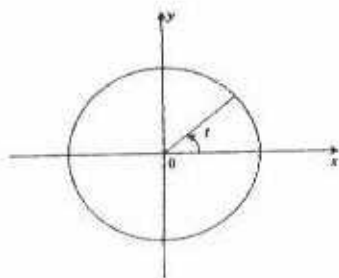


Рис. 15

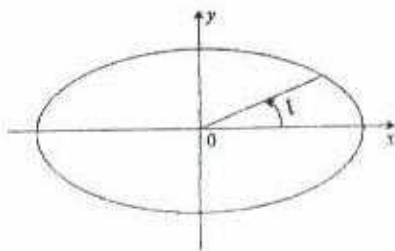


Рис. 16

Параметрические уравнения эллипса имеют вид

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Циклоида. Это кривая, которую описывает фиксированная точка окружности в то время, когда окружность катится по прямой (рис. 17). Параметрические уравнения циклоиды имеют вид

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

При $0 \leq t \leq 2\pi$ получим одну арку циклоиды.

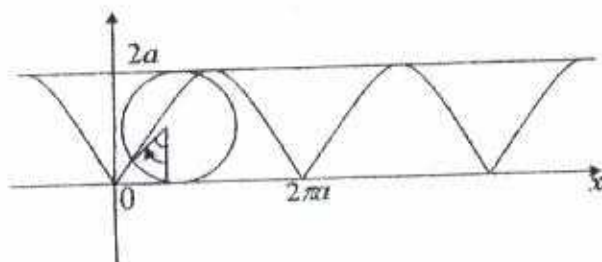


Рис. 17

Гипоциклоида (астроида). Это кривая, которую описывает фиксированная точка окружности радиуса $\frac{a}{4}$ при движении ее по внутренней части окружности радиуса a (см. рис. 18).

Параметрические уравнения гипоциклоиды имеют вид

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

В декартовой системе координат гипоциклоида задается уравнением $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

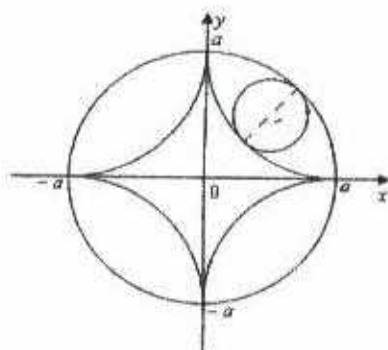


Рис. 18

Напомним, что работа W силового векторного поля $\vec{A} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ при перемещении тела вдоль линии L определяется с помощью криволинейного интеграла

$$W = \int_L (\vec{A}, d\vec{r}) = \int_C a_x dx + a_y dy.$$

Рассмотрим некоторые задачи, связанные с определением работы силового поля W в случае, когда кривую L удобнее задавать в параметрической форме.

а) Показать, что работа векторного поля магнитной напряженности $\vec{H} = \frac{2y}{x^2 + y^2} (-y\vec{i} + x\vec{j})$ вдоль окружности, расположенной в пространстве и заданной уравнениями $x^2 + y^2 = R^2$, $z = H$, не зависит от радиуса окружности.

Работа магнитного поля W выражается с помощью интеграла

$$W = \int_k -\frac{2y^2}{x^2 + y^2} dx + \frac{2xy}{x^2 + y^2} dy.$$

Вводя параметрические уравнения окружности $x = R \cos t, y = R \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ и учитывая, что $dx = R \cdot (-\sin t) dt, dy = R \cdot \cos t dt$, получим

$$W = 2R \int_0^{2\pi} (\sin^3 t + \cos^3 t \sin t) dt = 2R \int_0^{2\pi} \sin t dt = 0,$$

т.е. работа W не зависит от радиуса окружности R .

б) Вычислить работу W векторного поля $\vec{A} = (x^2 + y^2 - 2x)\vec{i} + (x + y)\vec{j}$ при движении вдоль дуги окружности, заданной уравнением $(x-1)^2 + y^2 = 1$, от точки $M(0, 0)$ до точки $N(1, 1)$ (см. рис. 19).

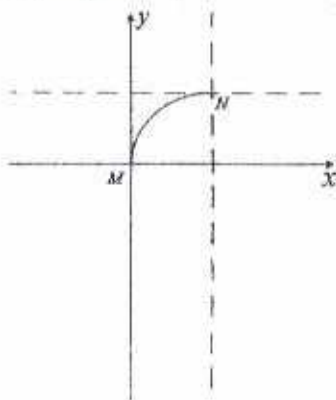


Рис. 19

Перейдем к новой системе координат, положим $x_1 = x - 1, y_1 = y$.

На рис. 19 эта новая система координат обозначена пунктиром. Уравнение окружности принимает вид

Тогда дуга окружности L в параметрической форме задается



уравнением $x_1 = \cos t, \quad y_1 = \sin t, \quad -\frac{3}{2}\pi \leq t \leq -\pi$. Векторное поле $\vec{A}(M)$ в новой системе координат представляется так

$$\begin{aligned}\vec{A}(M) &= [(x_1 + 1)^2 + y_1^2 - 2(x_1 + 1)]\vec{i} + (x_1 + y_1 + 1)\vec{j} \Rightarrow \\ \vec{A}(M) &= (x_1^2 + y_1^2 - 1)\vec{i} + (x_1 + y_1 + 1)\vec{j}.\end{aligned}$$

Работа W векторного поля $\vec{A}(M)$ выразится с помощью интеграла

$$W = \int_L (x_1^2 + y_1^2 - 1)dx_1 + (x_1 + y_1 + 1)dy_1.$$

Учитывая параметрическое представление контура L и то, что $dx_1 = (-\sin t)dt, \quad dy_1 = \cos t dt$, получаем

$$\begin{aligned}W &= \int_{-\frac{3}{2}\pi}^{-\pi} [(\cos^2 t + \sin^2 t - 1)(-\sin t) + (\cos t + \sin t + 1)\cos t] dt = \\ &= \int_{-\frac{3}{2}\pi}^{-\pi} [\cos t(\cos t + \sin t + 1)] dt = \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

в) Найти работу силы $\vec{A}$ при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N (рис.20).

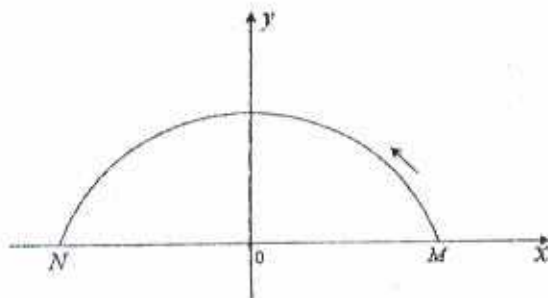


Рис. 20

$$\bar{A} = (x-y)\bar{i} + \bar{j}; \quad L: x^2 + y^2 = 4 \quad (y \geq 0); \quad M(+2, 0), N(-2, 0).$$

Решим этот пример, не записывая уравнение контура L в параметрическом виде:

$$W = \int_L (\bar{A}, d\bar{r}) = \int_L (x-y)dx + dy.$$

Уравнение контура L можно записать $y = \sqrt{4-x^2}$. Тогда

$$dy = \frac{-x dx}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$\begin{aligned} W &= \int_1^2 \left(x - \sqrt{4-x^2} - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx = \int_1^2 x dx - \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx - \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx = \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + \sqrt{4-x^2} \right) \Big|_1^2 = 2. \end{aligned}$$

4. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КАНОНИЧЕСКОГО ВИДА УРАВНЕНИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Общим уравнением поверхности второго порядка в декартовой системе координат называется уравнение вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0,$$

где a_{ij} , b_i , c – постоянные, причем a_{ij} не обращаются в нуль все одновременно.

Переходом к новой декартовой системе координат (к новому базису) данное уравнение может быть приведено к одному из следующих видов

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (1)$$

Это уравнение эллипсоида (рис. 21).

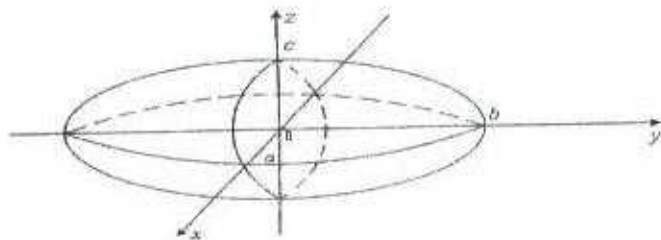


Рис. 21

Здесь a, b, c — полуоси эллипсоида. Сечения плоскостями $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, $z = \text{const}$ являются эллипсами. Если $a = b = c$, то уравнение (1) примет вид $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Это уравнение сферы радиуса a с центром в начале координат.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (2)$$

Это уравнение не определяет никакого геометрического места точек в пространстве и называется «мнимым эллипсоидом».

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (3)$$

Это уравнение однополостного гиперболоида (рис. 22).

Сечения его плоскостями $z = \text{const}$ (горизонтальные плоскости) являются эллипсами, а плоскостями $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ — гиперболами. В частном случае, когда $a = b$, получим гиперболоид вращения, у которого сечения $z = \text{const}$ являются окружностями.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (4)$$

Это уравнение двуполостного гиперболоида (рис. 23).

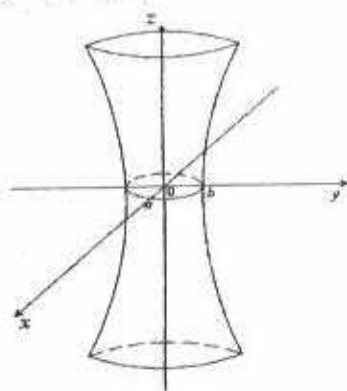


Рис. 22

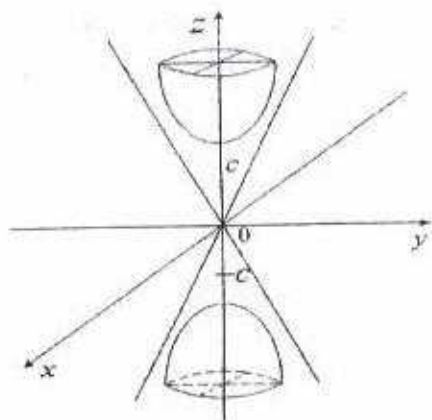


Рис. 23

Сечения плоскостями $z = \alpha(|\alpha| > c)$ являются эллипсами, а сечения плоскостями $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ являются гиперболами.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (5)$$

Геометрическим образом этого уравнения является только одна точка $O(0,0,0)$ – начало координат.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (6)$$

Это уравнение конуса (рис. 24).

Сечения плоскостями $z = const$ являются эллипсами. В частном случае, если $a = b$, то в сечении плоскостями $z = const$ получим окружности, т.е. конус будет круговым. Сечения плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ дают пары пересекающихся прямых. При этом $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{a}{c}$ (см. рис. 24).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z. \quad (7)$$

Это уравнение эллиптического параболоида (рис. 25).

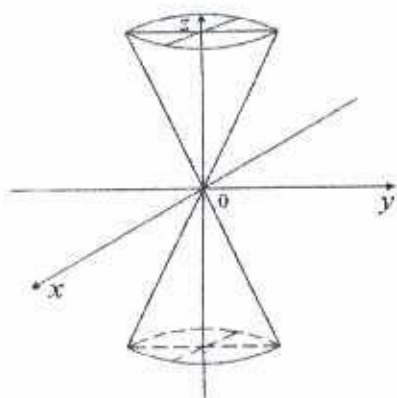


Рис. 24

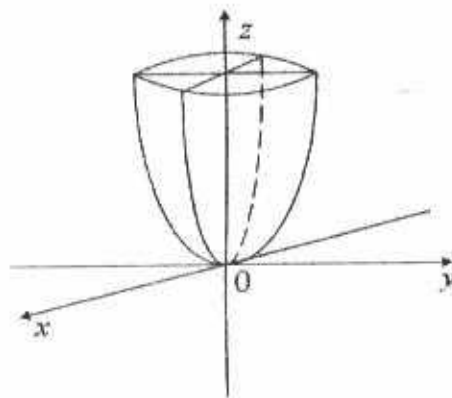


Рис. 25

Сечение плоскостями $z = const$ являются эллипсами (если $a = b$, то в сечении - окружности), а сечения плоскостями $x = const$ или $y = const$ являются параболоми.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z. \quad (8)$$

Это уравнение гиперболического параболоида (см. рис. 26).

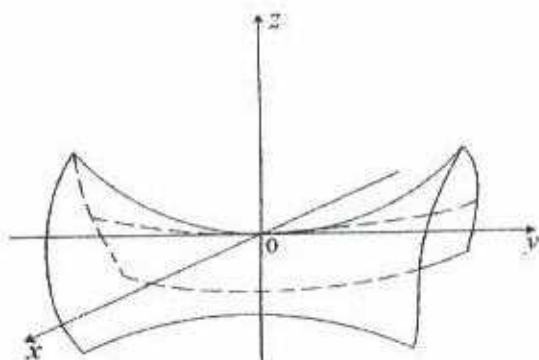


Рис. 26

В сечении этой поверхности плоскостью $z=0$ получим пару пересекающихся прямых $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ и $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$. Сечения плоскостями $x=0$ и $y=0$ являются параболами. Сечения плоскостями $z=\alpha$ ($\alpha \neq 0$) являются гиперболами.

Далее идет группа поверхностей, носящих название цилиндрических. Характерной особенностью канонических цилиндрических поверхностей является отсутствие в уравнении одной из переменных.

Пусть уравнение поверхности записано в виде $\varphi(x, y) = 0$. Для того чтобы нарисовать такую поверхность, достаточно на плоскости xOy нарисовать линию $\varphi(x, y) = 0$, а затем через каждую точку этой

линии провести прямую, параллельную оси Oz . Обычно полное название цилиндрической поверхности содержит название кривой $\varphi(x, y) = 0$ с добавлением слов «цилиндрическая» или «цилиндр».

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (9)$$

Это уравнение эллиптического цилиндра (см. рис. 27).

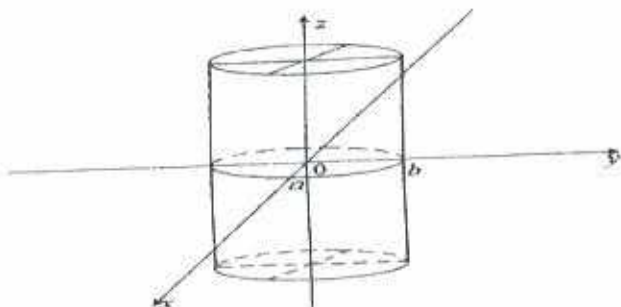


Рис. 27

Сечения плоскостями $z = \text{const}$ являются эллипсами, а сечения плоскостями $x = \text{const}$ или $y = \text{const}$ являются парами параллельных вертикальных прямых. В частном случае, когда $a = b$, получим цилиндр вращения.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1. \quad (10)$$

Это уравнение не определяет никакого геометрического образа и называется «мнимый эллиптический цилиндр».

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (11)$$

Это уравнение гиперболического цилиндра (см. рис. 28).

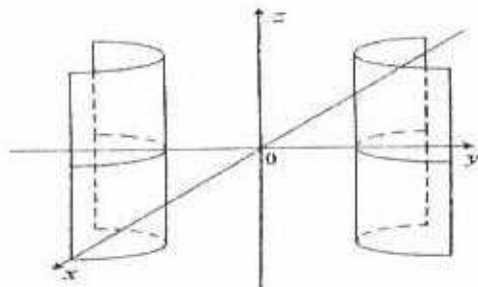


Рис. 28

В сечении этой поверхности плоскостями $z = \text{const}$ получим гиперболы, определяющиеся уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, а в сечении плоскостями $x = \text{const}$ или $y = \text{const}$ получим прямые, параллельные оси Oz .

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0. \quad (12)$$

Это уравнение определяет пару пересекающихся плоскостей (рис. 29).

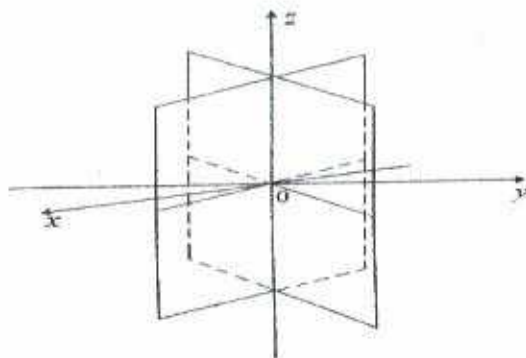


Рис. 29

Эти плоскости определяются уравнениями $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ и $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0. \quad (13)$$

Это уравнение определяет «пару мнимых пересекающихся плоскостей». Ясно, что z — любое, поэтому геометрическим образом этого уравнения является множество точек $x=0$, $y=0$ и z — любое, т.е. ось Oz .

$$x^2 = 2py. \quad (14)$$

Это уравнение параболического цилиндра (см. рис. 30).

В сечении этой поверхности плоскостями $z = \text{const}$ получим параболы, определяющиеся уравнением $y = \frac{x^2}{2p}$, а в сечении

плоскостями $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ получим прямые, параллельные оси Oz .

$$x^2 - a^2 = 0. \quad (15)$$

Это уравнение определяет пару параллельных плоскостей $x = a$ и $x = -a$ (см. рис. 31).

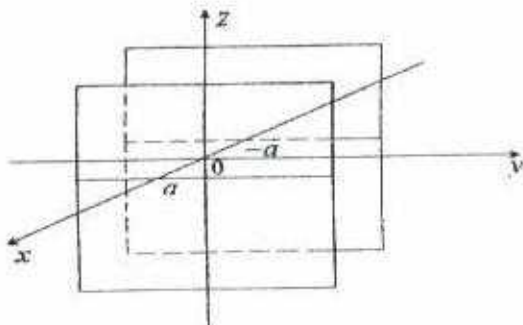


Рис. 31

$$x^2 + a^2 = 0. \quad (16)$$

Это уравнение не определяет никакого геометрического образа. Оно носит название «пара мнимых параллельных плоскостей».

$$x^2 = 0. \quad (17)$$

Это уравнение пары совпавших плоскостей $x = 0$, $x = 0$, т.е. плоскости yOz .

Этими поверхностями исчерпываются все виды поверхностей второго порядка. Отметим, что в канонических уравнениях (1) –

(17) переменные могут меняться местами, что означает изменение соответствующих поверхностей по отношению к осям координат. Например, пусть задана поверхность

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

Ясно, что это конус (см. (6), рис. 24), однако переменные y и z поменялись ролями, и соответственно теперь сечения $y = \text{const}$ являются эллипсами, т.е. имеем рис. 32.

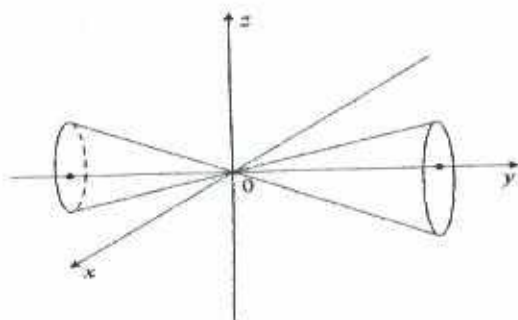


Рис. 31

Общие сведения о поверхностях второго порядка можно найти в [1], [2].

Задачи теории поля предполагают умение различать поверхности и умение геометрически правильно их рисовать. При этом полезно пользоваться методом сечений, т.е. рассмотреть сечения данной поверхности различными плоскостями, например плоскостями $x = \text{const}$; $y = \text{const}$; $z = \text{const}$. Полученные сечения дают

довольно полное представление о виде поверхности, и остается только уточнить некоторые дополнительные детали расположения поверхности в пространстве.

При отсутствии в общем уравнении второго порядка взаимных произведений x, y, z , т.е., если $a_{12} = a_{13} = a_{23}$, простыми алгебраическими преобразованиями: выделением полных квадратов, переносом членов в другую сторону равенства и делением на числовые коэффициенты, уравнение поверхности можно привести к одной из форм (1) – (17). Тогда остается только воспользоваться рисунками 21 – 31.

Рассмотрим примеры.

Пусть требуется определить типы следующих поверхностей и нарисовать их:

а) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2x - 4y - 12z + 8 = 0$;

б) $x^2 + y^2 - z - 4x + 4y - 11 = 0$;

в) $x^2 + 3y^2 - 5x + 4 = 0$.

а) Выделим сначала полные квадраты. Получим

$$(x+1)^2 + 2(y-1)^2 + 3(z-2)^2 = 7.$$

Замена $x_1 = x+1$, $y_1 = y-1$, $z_1 = z-2$ приводит данное уравнение к виду

$$x_1^2 + 2y_1^2 + 3z_1^2 = 7.$$

Поделим теперь обе части равенства на число 7 и получим

$$\frac{x_1^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} + \frac{y_1^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} + \frac{z_1^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2} = 1.$$

Это уравнение эллипсоида (1) с полуосями $a = \sqrt{7}$, $b = \sqrt{\frac{7}{2}}$, $c = \sqrt{\frac{7}{3}}$. Преобразование $x_1 = x + 1$, $y_1 = y - 1$, $z_1 = z - 2$ означает параллельный перенос координат. Новое начало координат будет в точке $O_1(-1, 1, 2)$. Вышеуказанный эллипсоид изобразится следующим образом (см. рис. 33).

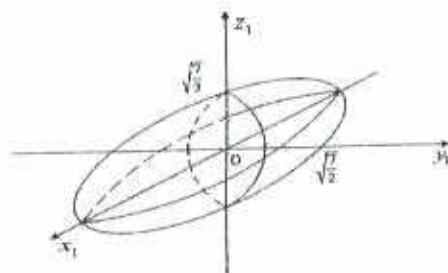


Рис. 33

б) Выделим полные квадраты и получим $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = z + 19$. Замена $x_1 = x - 2$, $y_1 = y + 2$, $z_1 = z + 19$ приводит это уравнение к виду $x_1^2 + y_1^2 = z_1$. Это уравнение параболоида типа (7). Произведенная замена переменных означает параллельный перенос осей координат. Новое начало координат будет в точке $O'(2, -2, 19)$. Так

как $a=b=1$, то данная поверхность есть параболоид вращения (см. рис. 34).

в) В уравнении отсутствует переменная z , поэтому ясно, что это цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси Oz . Выделяя полный квадрат, получим

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 4y^2 = \frac{9}{4}.$$

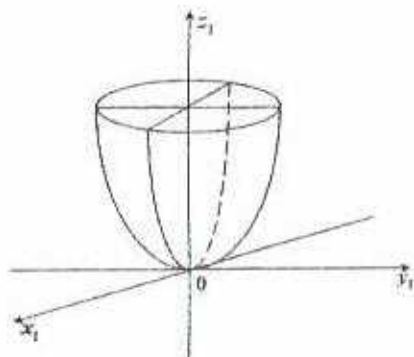


Рис. 34

Замена переменных $x_1 = x - \frac{5}{2}$, $y_1 = y$ приводит это уравнение к виду

$$x_1^2 + 4y_1^2 = \frac{9}{4} \text{ или } \frac{x_1^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \frac{y_1^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = 1.$$

Это уравнение типа (9), т.е. в системе координат x_1 , y_1 , z_1 , полученной из первоначальной системы параллельным переносом

начала координат в точку $O'(\frac{5}{2}, 0, 0)$, имеем эллиптический цилиндр (см. рис. 35).

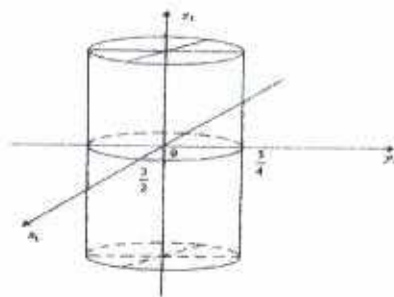


Рис. 35

В этом случае, когда общее уравнение поверхности второго порядка содержит хотя бы одно слагаемое с произведениями $xу$, xz или yz , т.е. хотя бы один из коэффициентов a_{12} , a_{13} , a_{23} отличен от нуля, приходится еще осуществлять поворот в пространстве новых осей координат $O'x_1$, $O'y_1$, $O'z_1$.

Этот процесс описан в книгах [1], [2].

5. ПРИМЕРЫ НАХОЖДЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ УРОВНЯ СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ

Скалярное поле в трехмерном пространстве задается с помощью функции трех переменных $u = u(x, y, z) = u(M)$. Поверхности уровня скалярного поля (например, эквипотенциальные поверхности) определяются уравнением $u(x, y, z) = c$, где c — некоторая постоянная. Другими словами, ищется множество точек пространства, где поле сохраняет одно и тоже значение c .

Рассмотрим примеры.

Пусть требуется найти поверхности уровня следующих скалярных полей:

а) $u = x^2 + y^2 + 3z$; б) $u = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25}$; в) $u = 5x^2 + y^3$.

а) Поверхности уровня определяются уравнением

$$x^2 + y^2 + 3z = c \text{ или } x^2 + y^2 = -3z + c.$$

При $c = 0$ получим $x^2 + y^2 = -3z$, следовательно $z \leq 0$. Ясно, что это параболоид вращения типа (7), расположенный в нижнем полупространстве (см. рис. 36).

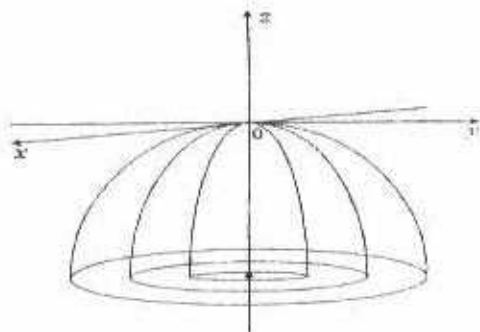


Рис. 36

При изменении c получаются параболоиды с вершинами в точках $z = \frac{c}{3}$ и с сечениями плоскостью $z=0$ вида $x^2 + y^2 = c$ (т.е. при $c > 0$ – это окружности радиуса $\sqrt{c}$).

б) Поверхности уровня определяются уравнением

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = c.$$

Ясно, что значение постоянной $c \geq 0$, т.к. поле принимает только положительные значения или нуль. При $c = 0$ поверхность уровня вырождается в точку $O(0,0,0)$ – начало координат. При $c > 0$ – это эллипсоиды. С увеличением c увеличиваются и полуоси эллипсоидов (см. рис. 37).

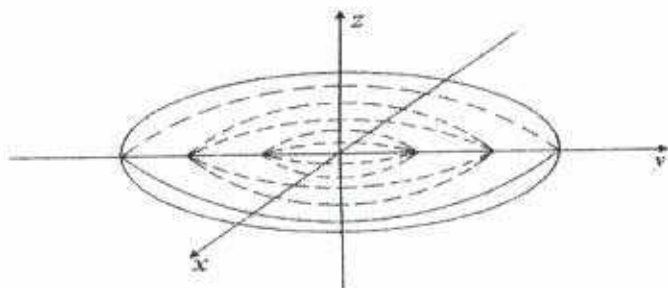


Рис. 37

в) В этом случае поверхности уровня есть круговые цилиндры с образующей, параллельной оси Oz . Действительно, поверхности уровня определяются уравнением $x^2 + y^2 = c$. Ясно, что $c \geq 0$.

Отсюда следует, что $x^2 + y^2 = \frac{\ln c}{\ln 5}$, а это уравнение задаст семейство круговых цилиндров (см. (9)), расширяющихся при увеличении постоянной c (см. рис. 38).

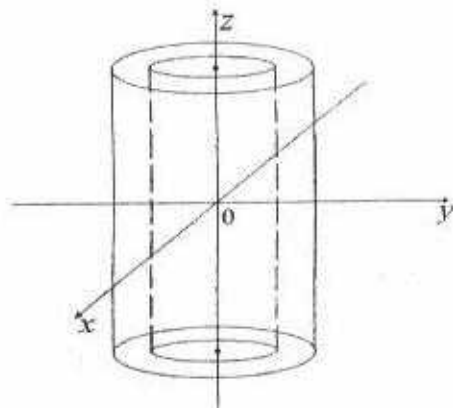


Рис. 38

6. ПРИМЕРЫ НАХОЖДЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ЛИНИЙ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Векторное поле в трехмерном пространстве задается с помощью вектора

$$\vec{A} = A_x(M)\vec{i} + A_y(M)\vec{j} + A_z(M)\vec{k} = A_x(x, y, z)\vec{i} + A_y(x, y, z)\vec{j} + A_z(x, y, z)\vec{k} = \{A_x, A_y, A_z\}$$

Векторные линии – это линии в пространстве, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением поля в этой точке.

Пусть векторная линия L задается параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Из условия параллельности вектора $\vec{ds} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, касательного к кривой L и вектора $\vec{A}$ в точке $M(x, y, z)$, получим дифференциальные уравнения для нахождения векторной линии L :

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}.$$

Рассмотрим примеры.

Пусть требуется найти векторные линии следующих векторных полей:

а) $\vec{A} = 7y\vec{i} + 14z\vec{k}$,

б) $\vec{A} = 2x\vec{i} + 6z\vec{k}$,

в) $\vec{A} = 9z\vec{j} - 4y\vec{k}$.

а) Векторные линии поля $\vec{A}$ определяются из уравнений

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{7y} = \frac{dz}{14z}.$$

Интегрируя эти уравнения, получим $x = C_1$, $\frac{1}{7} \ln|y| = \frac{1}{14} \ln|z| + C$.

Следовательно, векторные линии являются линиями пересечения следующих поверхностей: $x = C_1$, $z = C_2 y^2$. Поверхности $z = C_2 y^2$ — это поверхности типа (14), т.е. параболические цилиндры с образующей, параллельной оси Ox (т.к. переменная x отсутствует в уравнении), а $x = C_1$ — плоскости. В пересечении этих поверхностей мы получаем семейство парабол с вершинами в точках оси Ox (см. рис. 39).

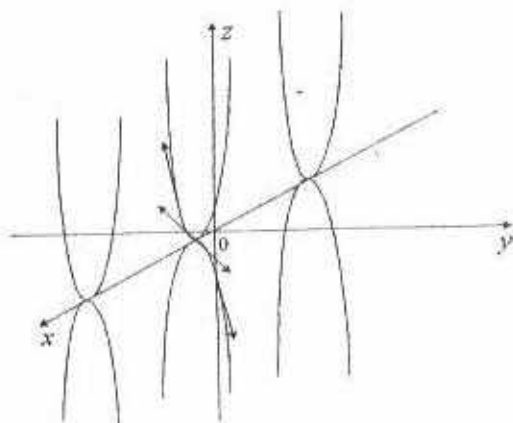


Рис. 39

С увеличением постоянной C_2 эти параболы будут более крутыми.

б) Векторные линии поля $\vec{A}$ определяются из уравнений

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{6z}.$$

Интегрируя эти уравнения, получим $\frac{1}{2} \ln|x| = \frac{1}{6} \ln|z| + C, y = C_2$.

Следовательно, векторные линии являются линиями пересечения следующих поверхностей:

$$z = C_1 x^3, y = C_2.$$

Поверхность $z = C_1 x^3$ не является поверхностью второго порядка, однако эта поверхность цилиндрическая, т.к. в ее уравнение не входит переменная y . На плоскости xOz линии $z = Cx^3$ — это кубические параболы. Следовательно, поверхность $z = C_1 x^3$ — это цилиндр, с образующей, параллельной оси Oy . Направляющей этого цилиндра служит кубическая парабола. Уравнение $y = C_2$ задает плоскости, параллельные плоскости xOz (см. рис. 40).

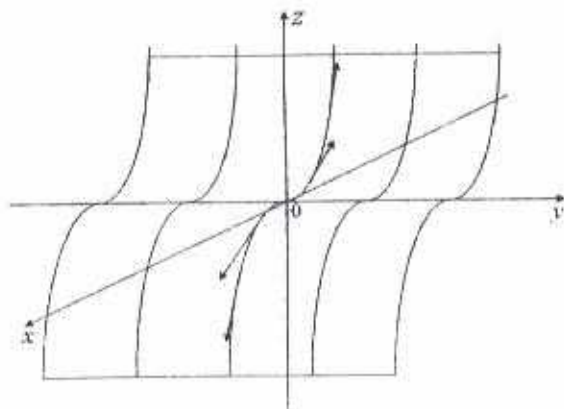


Рис. 39

в) Векторные линии поля $\vec{A}$ определяются из уравнений

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{9z} = \frac{dz}{-4y}.$$

Интегрируя эти уравнения, получим $x = C_1$, $-4ydy = 9zdz \Rightarrow x = C_1$, $-2y^2 = \frac{9z^2}{2} + C_2$, и окончательно уравнениями векторных линий являются $9z^2 + 4y^2 = C_1$, $x = C_2$, т.е. векторные линии – это семейство линий пересечения этих двух поверхностей.

Уравнение $9z^2 + 4y^2 = C_1$ определяет семейство эллиптических цилиндров типа (9), с образующей, параллельной оси Ox , $C_1 \geq 0$. Сечения этих эллиптических цилиндров плоскостями $x = C_2$ определяют семейства эллипсов с центрами на оси Ox (см. рис. 41).

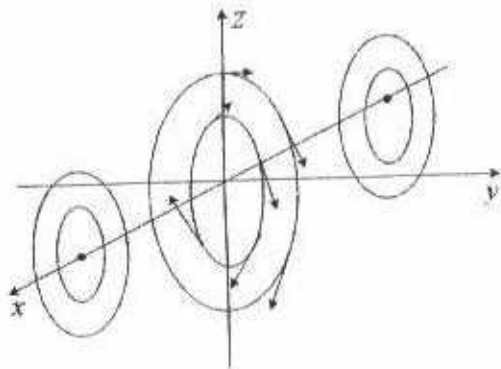


Рис. 41

7. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОТОКОВ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ ЧЕРЕЗ НЕЗАМКНУТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Потоком векторного поля $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$ через поверхность S в направлении нормали $\vec{n}$ называется поверхностный интеграл первого рода от проекции A_n поля $\vec{A}$ на направление нормали $\vec{n}$

$$\Pi_s = \iint_S A_n(M) dS = \iint_S (\vec{A}, \vec{n}^0) dS,$$

где $\vec{n}^0$ — вектор единичной нормали, т.е. $|\vec{n}^0| = 1$.

В частности, если поверхность S замкнутая, кусочно-гладкая, и функции $A_x(M)$, $A_y(M)$, $A_z(M)$ непрерывны вместе с частными производными первого порядка в области SUV , где V — объем, ограниченный поверхностью, то имеет место формула Остроградского — Гаусса

$$\Pi_s = \iint_S (\vec{A}, \vec{n}^0) dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dv,$$

где $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ — дивергенция (расходимость) векторного поля $\vec{A}$.

Напомним, что координаты единичного вектора нормали $\vec{n}^0 = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ к поверхности S , заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$, находятся из следующих формул:

$$\cos \alpha = \frac{F'_x}{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}};$$

$$\cos \beta = \frac{F'_x}{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{F'_z}{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}}.$$

По знаку $\cos \gamma = \cos(\vec{n}^0, Oz)$ можно судить о том, составляет ли $\vec{n}^0$ острый или тупой угол с осью Oz . Следовательно, если получившаяся из формул нормаль $\vec{n}^0$ не удовлетворяет требованиям задачи, то следует взять $-\vec{n}^0$, т.е. взять $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ со знаком минус.

При вычислении потока Π векторного поля важно помнить свойства потока.

1. Поток меняет знак на противоположный при изменении направления вектора нормали $\vec{n}^0$.

2. Поток поля $\alpha \vec{A} + \beta \vec{B}$, где α, β — постоянные числа, равняется потоку векторного поля $\vec{A}$, умноженному на число α , плюс поток векторного поля $\vec{B}$, умноженному на число β (свойство линейности).

3. Поток через всю поверхность S равняется сумме потоков через поверхности $S_1, S_2, \dots, S_k$, где $S = \bigcup_{i=1}^k S_i$ и S_i взаимно не перекрываются.

4. Если $\vec{A} \perp \vec{n}^0$ в каждой точке поверхности S , то поток $\vec{A}$ через поверхность S равняется нулю.

5. Если векторное поле $\vec{A}$ соленоидальное, т.е. $\operatorname{div} \vec{A} = 0$, то поток через любую замкнутую кусочно-гладкую поверхность

равняется нулю. Это свойство является следствием теоремы Остроградского – Гаусса.

Напомним еще, что все поверхности первого порядка, т.е. поверхности, задаваемые в декартовой системе координат уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

представляют собой плоскости. Здесь не все коэффициенты A, B, C равны нулю одновременно.

При решении задач, связанных с вычислением потоков (особенно с применением формулы Гаусса - Остроградского), важно помнить, что удачно выбранная система координат существенно облегчает вычисления. Чаще всего применяются цилиндрические и сферические системы координат. Цилиндрическая система координат изображена на рис. 42. Формулы, связывающие цилиндрическую систему координат (r, φ, z) и декартову систему (x, y, z) , имеют вид

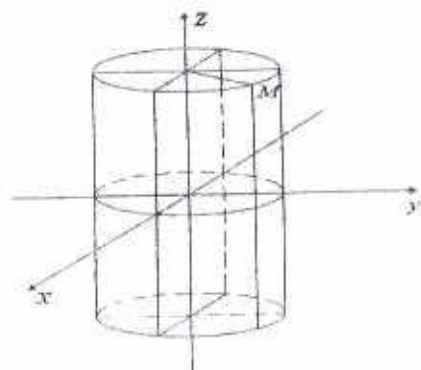


Рис. 42

$$x = r \cos \varphi;$$

$$y = r \sin \varphi;$$

$$z = z.$$

Якобиан I при переходе от декартовой системы координат к цилиндрической системе вычисляется по формуле

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = r,$$

т.е. элемент объема $dx dy dz = r dr d\varphi dz$.

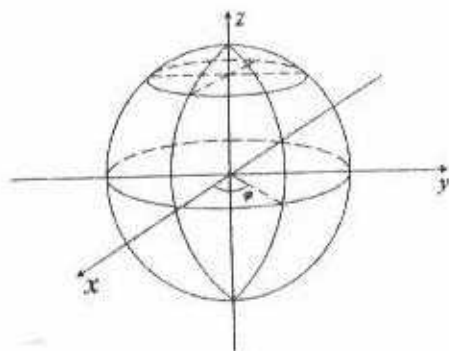


Рис. 43

Сферическая система координат изображена на рис. 43. Формулы, связывающие сферическую систему координат (r, φ, θ) и декартову систему (x, y, z) , имеют вид

$$x = r \cos \varphi \sin \theta;$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta;$$

$$z = r \cos \theta.$$

Якобиан I в этом случае вычисляется по формуле $I = r^2 \sin \theta$, т.е. элемент объема

$$dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta.$$

Рассмотрим несколько задач на вычисление потока векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в случае, когда S незамкнутая поверхность.

Пусть требуется найти поток векторного поля $\vec{A}$ через часть поверхности S , вырезанную плоскостью P (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями):

$$a) \quad \vec{A} = x\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (z-y)\vec{k},$$

$$S: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9,$$

$$P: \quad z=0 \quad (z \geq 0)$$

$$б) \quad \vec{A} = xyz\vec{i} - x^2z\vec{j} + 3\vec{k},$$

$$S: \quad x^2 + y^2 = z^2,$$

$$P: \quad z=4.$$

а) Решим его двумя способами. Сначала будем исходить из определения потока векторного поля. Очевидно, что S – это сфера радиуса 3 с центром в начале координат (см. тип 1). Поверхность, через которую требуется вычислить поток – это верхняя полусфера.

Вектор единичной нормали $\vec{n}^0$ к ней образует острый угол с осью Oz , т.е. $\cos \gamma > 0$ (см. рис. 44):

$$\Pi_S = \iint_S (\vec{A}, \vec{n}^0) ds,$$

где $\vec{n}^0 = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$.

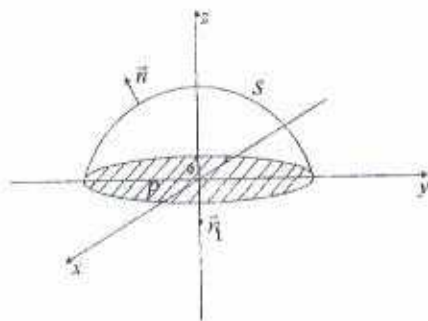


Рис. 44

Найдем координаты вектора $\vec{n}^0$. Для этого воспользуемся уравнением поверхности S : $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$. Тогда $F'_x = 2x$, $F'_y = 2y$, $F'_z = 2z$ и из общих формул для координат вектора единичной нормали $\vec{n}^0$ получим

$$\cos \alpha = \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \frac{x}{3}, \quad \cos \beta = \frac{y}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{3},$$

$$\text{т.е. } \vec{n} = \left\{ \frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3} \right\}.$$

Теперь можно вычислить Π_s :

$$\begin{aligned} \Pi_s &= \iint_S \left[\frac{x}{3} \cdot x + \frac{y}{3} (y+z) + \frac{z}{3} (z-y) \right] ds = \\ &= \iint_S \left(\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{3} \right) ds = 3 \iint_S ds = 3 \cdot \frac{4\pi \cdot 9}{2} = 54\pi. \end{aligned}$$

Мы воспользовались известной формулой для площади поверхности S сферы радиуса R $S = 4\pi R^2$.

Другой способ решения этого примера заключается в использовании формулы Остроградского – Гаусса. По свойству 3 потока векторного поля и в силу формулы Остроградского – Гаусса получим

$$\Pi_{s+p} = \Pi_s + \Pi_p = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dv.$$

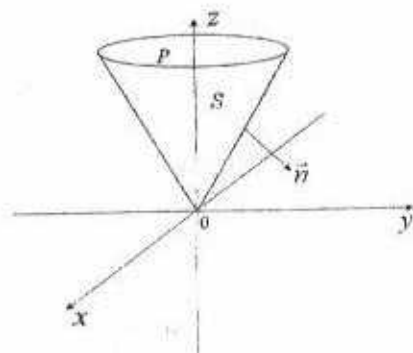


Рис. 45

Вычислим

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \\ &= 1 + 1 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Pi_{s+p} &= 3 \iiint_V dv = \\ &= 3 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (3)^3 \cdot \frac{1}{2} = 54\pi. \end{aligned}$$

Мы воспользовались известной формулой для объема V сферы радиуса R

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Вычислим теперь поток через плоскость P .

$$P: F(x, y, z) = z = 0 \Rightarrow F'_x = 0, F'_y = 0, F'_z = 1, \quad \vec{n}_1^0 = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}.$$

По общим формулам для координат вектора единичной нормали получаем $\cos \alpha = 0, \cos \beta = 0, \cos \gamma = 1$. Из рис. 44 ясно, что $\vec{n}_1^0$ образует тупой угол с осью oz , т.е. координаты вектора $\vec{n}_1^0 = \{0, 0, -1\}$.

$$\Pi_r = \iint_r (\vec{A}, \vec{n}_1^0) ds = \iint_r (y - z) ds.$$

На плоскости $Pz = 0$, т.е. $\Pi_r = \iint_r y ds, \quad ds = \frac{dxdy}{|\cos \gamma|} = dxdy,$

$$\Pi_r = \iint_D y dxdy = \iint_D r \cos \varphi \cdot r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^3 r^2 dr = 0. \quad \text{Область } D$$

заштрихована на рис. 44. Окончательно получаем $\Pi_{s,r} = \Pi_s = 54\pi$.

б) В этом случае поверхность S – конус (см. тип б), а P – горизонтальная плоскость. Нормаль $\vec{n}^0$ образует тупой угол с осью oz (см. рис. 45).

Найдем координаты вектора $\vec{n}^0$. Уравнение поверхности

$$S: F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0 \Rightarrow F'_x = 2x, F'_y = 2y, F'_z = -2z.$$

По общим формулам для координат вектора единичной нормали получаем

$$\cos \alpha = \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}; \cos \beta = \frac{2y}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}};$$

$$\cos \gamma = \frac{-2z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}},$$

т.е. $\vec{n}^0 = \left\{ \frac{x}{z\sqrt{2}}, \frac{y}{z\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \Pi_s &= \iint_s (\vec{A}, \vec{n}^0) ds = \iint_s \left(\frac{x^2 yz}{z\sqrt{2}} - \frac{x^2 yz}{z\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} \right) ds = \\ &= -\frac{3}{\sqrt{2}} \iint_s ds = -\frac{3}{\sqrt{2}} \iint_s ds = -\frac{3}{\sqrt{2}} \pi \cdot 4 \cdot 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Мы воспользовались известной формулой для площади S боковой поверхности конуса с образующей l , у которого в основании лежит круг радиуса R , $S_{\text{бок}} = \pi R l$.

Другой способ решения этого примера.

Имеем $\Pi_{s,r} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dv = \iiint_V yz dv$.

Перейдем к цилиндрической системе координат. Уравнение конуса

$$S: z = r, \Pi_{s,r} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 r \cdot r \sin \varphi dr \int_r^4 dz = \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^4 r^2 (4-r) dr = 0.$$

Вычислим теперь поток векторного поля $\vec{A}$ через плоскость P . Из рис. 45 ясно, что $\vec{n}_i^0 = (0, 0, 1)$, и тогда $\Pi_P = \iint_P 3 ds = 3\pi R^2 = 48\pi$. Следовательно, $\Pi_s = \Pi_{s,r} - \Pi_P = -48\pi$, что согласуется с предыдущим результатом.

8. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОТОКА ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ЧЕРЕЗ ЗАМКНУТУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

а) Пусть напряженность электрического поля

$$\vec{E} = \frac{4}{5} \left(\frac{x^4}{9} \vec{i} + \frac{y^3}{4} \vec{j} + \frac{z^4}{25} \vec{k} \right).$$
 Требуется вычислить поток векторного поля

$\vec{E}$ через замкнутую поверхность S

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1.$$

Нормаль $\vec{n}^{\circ}$ – внешняя (см. рис. 46).

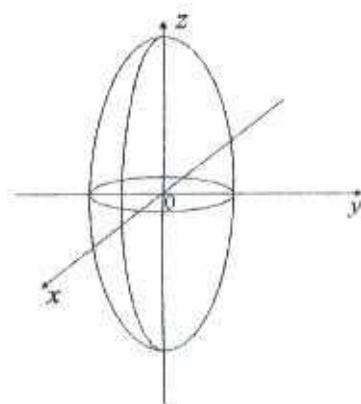


Рис. 46

Поверхность S – эллипсоид (см. тип 1) с полуосями $a=3; b=2; c=5$. Воспользуемся формулой Гаусса – Остроградского.

Вычислим сначала $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{4}{5} \left(\frac{3x^2}{9} + \frac{3y^2}{4} + \frac{3z^2}{25} \right)$. Тогда

б) В этом примере замкнутая поверхность S образована частью плоскости, расположенной в первом октанте и координатными плоскостями, т.е. это поверхность пирамиды (см. рис. 47).

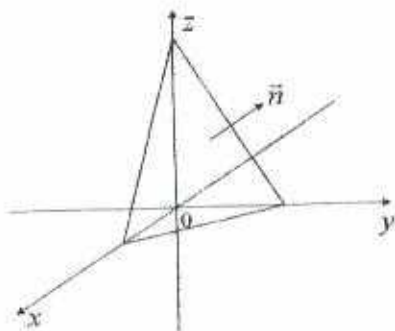


Рис. 47

Уравнение плоскости удобно записать в виде $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$. Это уравнение плоскости в отрезках. Вычислим сначала

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ &= -5 + 0 + 2 = -3. \end{aligned}$$

Применим формулу Остроградского – Гаусса

$$\Pi_S = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dv = -3 \iiint_V dv = -3V = -3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 = -8.$$

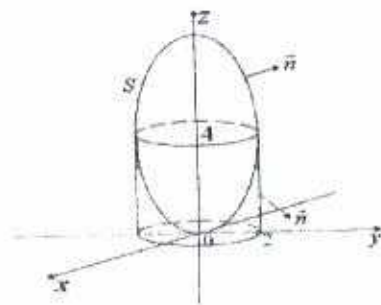


Рис. 48

в) В этом примере поверхность S образована двумя параболоидами вращения (7), рис. 48. Они пересекаются на высоте $z = 4$, по окружности радиуса 2, т.к. из равенства $8 - x^2 - y^2 = x^2 + y^2$ следует, что $x^2 + y^2 = 4$. Вычислим

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 1 + 0 + 0 = 1, \quad \Pi_S = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dv = \iiint_V dv = \iiint_V dx dy dz.$$

Для вычисления последнего интеграла удобно воспользоваться цилиндрической системой координат.

В этой системе координат S : $\begin{matrix} z = 8 - r^2, \\ z = r^2 \end{matrix}$ и тогда

$$\begin{aligned} \Pi_S &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr \int_{r^2}^{8-r^2} dz = 2\pi \int_0^2 r(8 - r^2 - r^2) dr = \\ &= 2\pi \left(4r^2 - \frac{r^4}{2} \right) \Big|_0^2 = 2\pi(16 - 8) = 16\pi. \end{aligned}$$

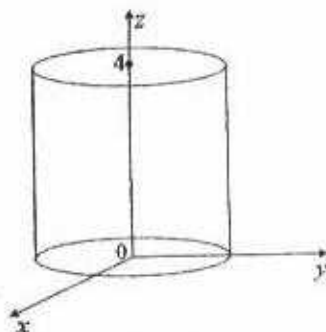


Рис. 49

г) В этом примере замкнутая поверхность S образована круговым цилиндром радиуса 1 (см. тип 9) и двумя горизонтальными плоскостями (см. рис. 49).

Вычислим

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = x + 2y + x + 1 = 2x + 2y + 1, \\ \Pi_S &= \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dv = \iiint_V (2x + 2y + 1) dx dy dz. \end{aligned}$$

Перейдем к цилиндрической системе координат.

$$\begin{aligned}
\Pi_5 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_0^4 (2r \cos \varphi + 2r \sin \varphi + 1) dz = \\
&= 4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (2r^2 \cos \varphi + 2r^2 \sin \varphi + r) dr = \\
&= 4 \int_0^{2\pi} \left(\frac{2r^3}{3} \cos \varphi + \frac{2r^3}{3} \sin \varphi + \frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^1 d\varphi = 4 \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3} \cos \varphi + \frac{2}{3} \sin \varphi + \frac{1}{2} \right) d\varphi = 4\pi.
\end{aligned}$$

9. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЦИРКУЛЯЦИИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ВДОЛЬ КОНТУРА

Циркуляцией $\mathcal{U}$ векторного поля $\vec{A}$ вдоль замкнутой кусочно-гладкой линии L называется криволинейный интеграл второго рода

$$\mathcal{U} = \int_L A_x dx + A_y dy + A_z dz = \int_L (\vec{A} d\vec{l}).$$

Натянем на кривую L некоторую кусочно-гладкую поверхность S и выберем согласованное направление обхода кривой L и нормали на S (см. рис. 50).

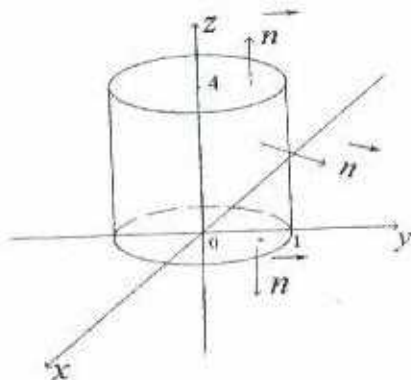


Рис. 50

Тогда справедлива формула Стокса

$$\mathcal{U} = \int_L (\vec{A}, d\vec{l}) = \iint_S (\text{rot } \vec{A}, \vec{n}^0) ds = \iint_S \text{rot}_n \vec{A} ds.$$

Здесь $\text{rot } \vec{A}$ — ротор (вихрь) векторного поля $\vec{A}$ находится по правилу

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{A},$$

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ — «набла», оператор Гамильтона. Если $\operatorname{rot} \vec{A} = 0$, то поле $\vec{A}$ называется безвихревым (потенциальным, консервативным). Для безвихревых полей из теоремы Стокса следует, что циркуляция всегда равна нулю (работа вдоль замкнутого контура равняется нулю, например, в гравитационном поле).

Рассмотрим несколько примеров.

Пусть требуется найти циркуляцию векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L :

$$\text{а) } \vec{A} = \frac{1}{3} y \vec{i} - 3x \vec{j} + x \vec{k}, \quad L: \begin{cases} x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, \\ z = 1 - 2 \cos t - 2 \sin t; \end{cases}$$

$$\text{б) } \vec{A} = yz \vec{i} - xz \vec{j} + xy \vec{k}, \quad L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$$

а) Из параметрических уравнений линии L найдем ее уравнения, как пересечение двух поверхностей

$$L: \begin{cases} z = 1 - x - y, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Следовательно, линия L является пересечением плоскости и кругового цилиндра (см. рис. 51).

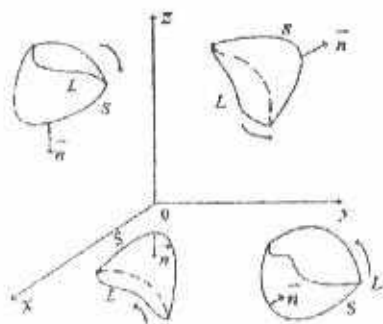


Рис. 51

$$U = \oint_L A_x dx + A_y dy + A_z dz = \oint_L \frac{1}{3} y dx - 3x dy + x dz.$$

Подставляя в этот интеграл параметрические уравнения линии L получим

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3} \cdot 2 \sin t (-2 \sin t) - 3 \cdot 2 \cos t \cdot 2 \cos t + 2 \cos t \cdot (2 \sin t - 2 \cos t) \right] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{4}{3} \sin^2 t - 12 \cos^2 t + 4 \cos t \sin t - 4 \cos^2 t \right) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{4}{3} \sin^2 t - 16 \cos^2 t \right) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{2}{3} (1 - \cos 2t) - 8 (1 + \cos 2t) \right] dt = -\frac{2}{3} \cdot 2\pi = -\frac{52}{3} \pi. \end{aligned}$$

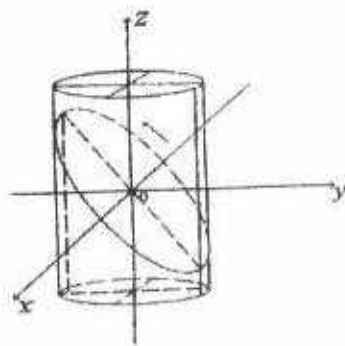


Рис. 52

б) В этом примере замкнутая линия L получается в пересечении сферы радиуса 3 и кругового цилиндра радиуса 3 (см. рис. 52).

Вычислим ротор векторного поля $\vec{A}$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{A} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & -xz & xy \end{vmatrix} = \\ &= (x+x)\vec{i} + (y-y)\vec{j} + (z-z)\vec{k} = 2x\vec{i} - 2z\vec{k}. \end{aligned}$$

Натянем на линию L плоскость $z=0$.

Тогда единичный вектор нормали к этой плоскости $\vec{n}^0 = \{0, 0, 1\}$.

$$\begin{aligned} U &= \oint_L (\vec{A}, d\vec{l}) = \iint_D (\operatorname{rot} \vec{A}, \vec{n}^0) dS = -2 \iint_D z dS = 0, \\ z &= 0, \end{aligned}$$

Общие сведения об основных понятиях скалярных и векторных полей можно найти в [3], [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. — М.: Наука, 1975.
2. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, 1975.
3. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. — М.: Наука, Ч. II 1973.
4. Никольский С. М. Курс математического анализа. — М.: Наука, Ч. II. 1973.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Примеры приведения общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду	3
2. Примеры на нахождение линий уровня плоских скалярных полей	11
3. Примеры на вычисление работы плоского силового поля с использованием параметрического задания кривых	14
4. Примеры использования канонического вида уравнений поверхностей второго порядка	20
5. Примеры нахождения поверхностей уровня скалярных функций	34
6. Примеры нахождения векторных линий векторных полей	37
7. Вычисление потоков векторных полей через незамкнутое поверхности	41
8. Примеры вычисления потока векторного поля через замкнутую поверхность	49
9. Вычисление циркуляции векторного поля вдоль контура	54
Литература	58

**Бурхан Тешебаевич Калимбетов
Назгуль Заркеновна Байгулова
Самат Рахымбаевич Дулатов
Айжан Нигматуллаевна Урматова**

КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Бумага офсетная Формат 60х100 1/16
Плотность 80гр/м². Белизна 95%. Печать РИЗО.
Усл.печ.стр. 4. Объем 64 стр.



Подготовлено к изданию и отпечатано
в издательстве «CyberSmith»
РК, Алматы, ул. Толе би, 292
Тел/факс: 8 (727) 2 33 80 45
e-mail: cybersmith@mail.ru

